

УДК 519.6

WEB-ОРИЕНТИРОВАННАЯ СИСТЕМА ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПАРЕТО-АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ МНОГОЦЕЛЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Белоус Валентина Владимировна

К.т.н., ст. преподаватель, e-mail: walentina.belous@gmail.com

Грошев Сергей Владимирович

Ст. преподаватель, e-mail: sgro@newmail.ru

Карпенко Анатолий Павлович

Д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой, e-mail: akarpenko@bmstu.ru

Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»,

ФГБОУ «Московский Государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», 105005

г. Москва, 2-я Бауманская ул. д. 5

Аннотация. WEB-ориентированная программная система PARETO-Q предназначена для удаленной оценки качества Парето-аппроксимации в задачах многоцелевой оптимизации. Система призвана решить проблему консолидации алгоритмов Парето-аппроксимации и алгоритмов оценки качества аппроксимации. Представляем используемое системой математическое обеспечение, архитектуру системы, некоторые результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: многоцелевая оптимизация, множество Парето, Парето-аппроксимация, индикаторы качества Парето-аппроксимации.

Цитирование: Белоус В.В., Грошев С.В., Карпенко А.П. Web-ориентированная система оценки качества Парето-аппроксимации в задачах многоцелевой оптимизации // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2019. № 2 (14). С. 122–132. DOI: 10.25729/2413-0133-2019-2-11

Введение. При решении практических, прежде всего, технических задач оптимизации часто возникают задачи многоцелевой (*multi objective*) оптимизации (МЦО-задачи), когда желательно экстремизировать не одну, а несколько целевых функций. Хорошо известно, что поскольку, как правило, нельзя добиться экстремального значения всех целевых функций одновременно, решение такой задачи представляет собой некоторый компромисс, принадлежащий множеству Парето (*Pareto set*) задачи, то есть множеству решений, не улучшаемых одновременно по всем целевым функциям. Решением МЦО-задачи называем множество Парето этой задачи, предполагая, что после построения некоторой конечномерной аппроксимации данного множества (П-аппроксимация), лицо, принимающее решение (ЛПР), неформальными или формализованными методами выбирает из него единственное решение.

Известно значительное число алгоритмов решения МЦО-задачи (МЦО-алгоритмов). Классические алгоритмы решения этой задачи основаны на сведении ее к совокупности задач глобальной одноцелевой оптимизации. Рассмотрим относительно новый и быстро развивающийся класс МЦО-алгоритмов – класс алгоритмов П-аппроксимации (П-

алгоритмов), которые предполагают предварительное построение некоторой конечномерной аппроксимации множества, а тем самым, и фронта Парето МЦО-задачи.

Обычно П-алгоритмы, чаще всего строят на основе генетических алгоритмов. Такие алгоритмы называют эволюционными. Наряду с этим известно значительное число П-алгоритмов, построенных с помощью алгоритмов роя частиц, колонии муравьев и колонии пчел и т.д. [5]. В качестве общего названия рассматриваемых П-алгоритмов используем термин «популяционные алгоритмы».

В силу большого числа П-алгоритмов актуальной является задача оценки и сравнения их эффективности. Данную задачу решают путем оценки качества П-аппроксимации, полученной с помощью этих алгоритмов. В содержательных терминах это может быть сделано с помощью следующих характеристик:

- близость найденных решений к точному множеству Парето рассматриваемой МЦО-задачи;
- равномерность распределения решений в полученной П-аппроксимации;
- мощность найденного множества решений.

В практически значимых МЦО-задачах, в которых, как правило, используются более двух критериев оптимальности, визуальный анализ качества соответствующей П-аппроксимации затруднен. Поэтому актуальной является задача разработки индикаторов качества П-аппроксимации, формализующих указанные характеристики. Следуя работе Зитцлера (*E. Zitzler*) с соавторами [6], назовем индикаторы такого сорта унарными (*unary quality indicators*). Качество П-аппроксимации можно оценивать также путем сравнения найденных решений с некоторыми другими, например, эталонными решениями. Аналогично, индикаторы такого сравнения назовем бинарными (*binary quality indicators*) [6].

Вследствие высокой практической значимости МЦО-задач разработано большое число программных систем многоцелевой оптимизации (МЦО-систем), которые разделяют на два класса [8–10, 12–14]: системы, поддерживающие оценку качества П-аппроксимации; системы, в которых такая оценка не реализована. Выполненный авторами обзор МЦО-систем [1] показывает, что общим их недостатком является отсутствие WEB-интерфейса. В то же время, возможность использования сети Интернет для проведения многопользовательской оценки качества Парето-аппроксимации представляется целесообразной. Предлагаемая авторами WEB-ориентированная система оценки качества П-аппроксимации в МЦО-задачах оптимизации получила наименование *PARETO-Q*.

1. Математическое обеспечение системы *PARETO-Q*. Постановка МЦО-задачи.

Множеством допустимых значений вектора варьируемых параметров X является ограниченное и замкнутое множество

$$D_X = \{X \mid G(X) \geq 0\} \subset \{X\} = R^{|X|},$$

где $|X|$ - размерность вектора X ; $G(X) = (g_1(X), g_2(X), \dots)$ - ограничивающая вектор-функция. Целевая вектор-функция $F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_{|F|}(X))$ со значениями в $|F|$ -мерном пространстве целей $\{F\} = R^{|F|}$ определена в области D_X . ЛПР стремится минимизировать в этой области каждую из частных целевых функций $f_1(X), f_2(X), \dots, f_{|F|}(X)$, что условно записываем в виде

$$\min_{X \in D_X} F(X) = F(X^*) = F^*, \quad (1)$$

где векторы X^* , F^* - искомое решение МЦО-задачи.

Целевая вектор-функция $F(X)$ выполняет отображение множества D_X в множество D_F пространства целей, называемое множеством достижимости. Фронт Парето задачи (1) обозначаем $D_F^* \in D_F$, а соответствующее множество Парето - $D_X^* \in D_X$. Напомним, что согласно известному принципу Эджворта-Парето, при «разумном» поведении ЛППР выбор решения МЦО-задачи следует производить на множестве Парето.

Архивное множество решений задачи (1), недоминируемых в пространстве $\{F\}$, обозначаем Θ .

Алгоритмы П-аппроксимации. В системе *PARETO-Q* реализованы широко известные алгоритмы П-аппроксимации *NSGA-II*, *SPEA-2*, *IBEA*, *FEMO*, *SIBEA*, *ECEA*, *EPSMOEA* [4].

Индикаторы качества П-аппроксимации. Система *PARETO-Q* использует следующие унарные индикаторы качества П-аппроксимации [6]:

- среднее расстояние до точного фронта Парето (*Generalization Distance, GD*) $I_{GD}(\Theta)$, характеризующее близость найденных решений Θ к точному фронту Парето D_F^* .

- среднее рассеяние (*Spacing, S*) $I_S(\Theta)$, представляющее собой меру равномерности распределения решений П-аппроксимации;

- максимальное рассеяние (*Maximum Spread, MS*) $I_{MS}(\Theta)$;

- отклонение от равномерного распределения (*Deviation from Uniform distribution, DU*) $I_{DU}(\Theta)$, формализующее, аналогично индикаторам $I_S(\Theta)$, $I_{MS}(\Theta)$ равномерность распределения архивных недоминируемых решений Θ в целевом пространстве;

- мощность множества решений (*Overall Nondominated Vector Generation*) $I_{ONVG}(\Theta)$, то есть число элементов множества Θ ;

- объем объемлющего гиперкуба (*Hypercube enclosing indicator, HC*) $I_{HC}(\Theta)$;

- относительное число ошибочных решений (*Error Ratio, ER*) $I_{ER}(\Theta)$, равное относительному числу решений архивного множества Θ , не принадлежащих точному фронту Парето D_F^* МЦО-задачи;

- максимальная ошибка аппроксимации (*Maximum Pareto front Error, MPE*) $I_{MPE}(\Theta)$.

Положим, что множество Θ_* недоминируемых решений в пространстве D_F является *эталонным*. Система *PARETO-Q* использует также ряд бинарных индикаторов [2]:

- индикатор $I_\varepsilon(\Theta_*, \Theta)$, формализующий близость множества Θ к множеству Θ_* как минимальную величину ε , при которой для любых векторов $F_j \in \Theta$, $F_k \in \Theta_*$ имеет место отношение ε -доминирования $F_j \succ_\varepsilon F_k$;

- покрытие (*Coverage*) $I_C(\Theta_*, \Theta)$, имеющее смысл относительного числа решений, принадлежащих множеству Θ_* , которые доминируются некоторыми из решений множества Θ ;

- разность покрытий (*coverage differences*) $\delta(\Theta_*, \Theta)$ - некоторая мера $\zeta(\bullet)$ части множества достижимости, слабо доминируемой множеством Θ_* , но не слабо доминируемой множеством Θ ;

- гиперобъем разности покрытий (*Hyper Volume of coverage difference*) $I_{HV}(\Theta_*, \Theta)$, использующий в качестве меры $\zeta(\bullet)$ объем соответствующей части множества достижимости.

Статистические методы сравнения П-алгоритмов. Положим, что речь идёт о сравнении эффективности $n \geq 2$ П-алгоритмов A^1, A^2, \dots, A^n . Пусть выполнено $r_i \geq 1$ запусков i -го алгоритма, в результате чего получена коллекция П-аппроксимаций $C = \{A_1^1, A_2^1, \dots, A_{r_1}^1, \dots, A_1^n, \dots, A_{r_n}^n\}$. Представленные выше индикаторы ставят в соответствие П-алгоритму $A^i, i \in [1:n]$ совокупность r_i наборов вещественных чисел $\{I_j(A_k^i), j \in [1:m], k \in [1:r_i]\}$ - значений используемых индикаторов I_1, I_2, \dots, I_m . К указанным наборам данных применяем стандартные процедуры статистического тестирования. Если сравниваются два П-алгоритма, то может быть использован ранговый статистический критерий Манна-Уитни [7]. Если сравниваются более двух алгоритмов, то используем ранговый статистический критерий Крускала-Уоллиса [7].

Заметим, что использование нескольких Парето-совместимых индикаторов качества П-аппроксимации может дать более полноценную оценку эффективности сравниваемых алгоритмов. Так, если два Парето совместимых индикатора оказываются по разным индикаторам противоречащими друг другу, то это означает, что рассматриваемые аппроксимации несравнимы.

Для оценки эффективности П-алгоритма A используем также эмпирическую функцию достижимости (*Empirical Attainment Function, EAF*). Для данного вектора $F \in D_F$ функция *EAF* имеет смысл относительной частоты, с которой данный вектор достижим в наборе аппроксимаций $\{A_j, j \in [1:r]\}$, то есть слабо доминируется элементами этого набора. Заметим, что значения *EAF* могут быть использованы также для визуализации результатов запусков П-алгоритмов [5].

Методы визуализации П-аппроксимации. Обзор методов визуализации многомерных данных и их применимость для визуализации решений П-аппроксимации представлен, например, в работе авторов [2] или других источниках [11,12]. В системе *PARETO-Q* для визуализации архивного множества решений Θ используем авторский комбинированный метод, основанный на *диагональном пересчете гиперпространства* (*Hyperspace diagonal counting, HSDC*) и методе параллельных координат [3].

В основе техники *HSDC* лежит теорема Кантора, утверждающая, что существует взаимно-однозначное соответствие между пространством произвольной размерности $|F|$ и пространством R^1 . Идея техники состоит в том, что гиперкуб $[0; 1]^{|F|}$ разбивают на гиперкубики, которые затем линейно упорядочивают. Пронумерованные кубики отображают на дискретную координатную ось в соответствии со своими порядковыми номерами.

Метод параллельных координат представляет собой одну из самых известных и часто используемых техник визуализации многомерных данных. Метод использует координатные оси, расположенные параллельно друг другу с некоторым интервалом. Точка многомерных данных отображается в виде ломаной линии, пересекающей координатные оси в местах, соответствующих значениям координат этой точки.

Тестовые МЦО-задачи. В системе реализованы «стандартные» тестовые задачи *ZDT1-ZDT6, DTLZ1-DTLZ7* [6].

2. Архитектура программной системы *PARETO-Q*. В системе реализована работа с проектами – совокупностью вычислительных экспериментов по оценке качества одной или нескольких П-аппроксимаций данной МЦО-задачи. Ядро программной системы составляет математическая подсистема, которая включает в себя пополняемые наборы программ для расчета индикаторов качества П-аппроксимации, программ для построения точного фронта Парето, а также программ, реализующих различные методы П-аппроксимации [4]. Общая структурная схема программной системы представлена на рисунке 1, а схема взаимодействия подсистем – на рисунке 2.

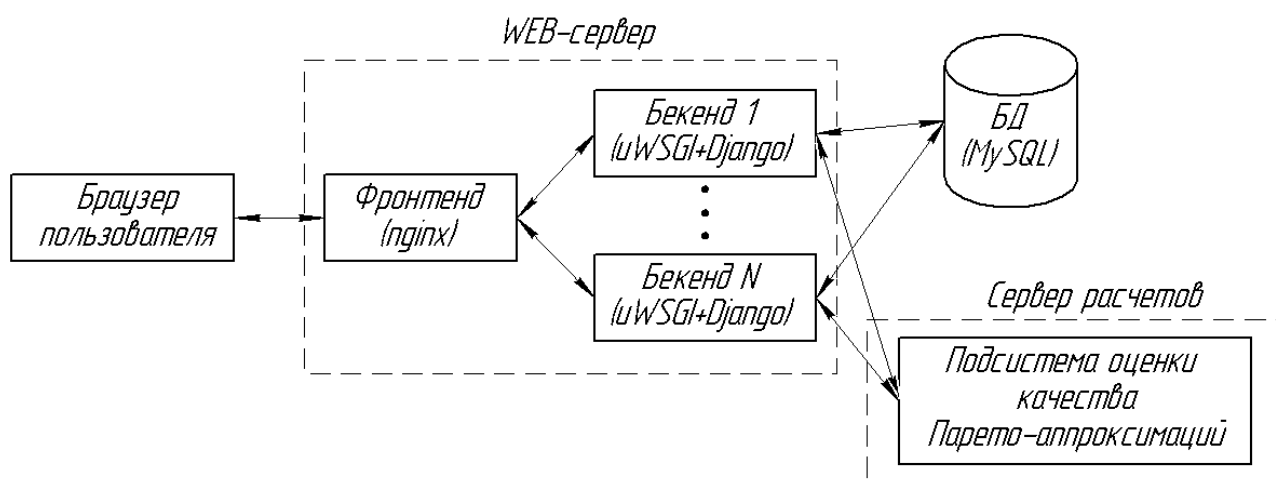


Рис. 1. Структурная схема системы PARETO-Q

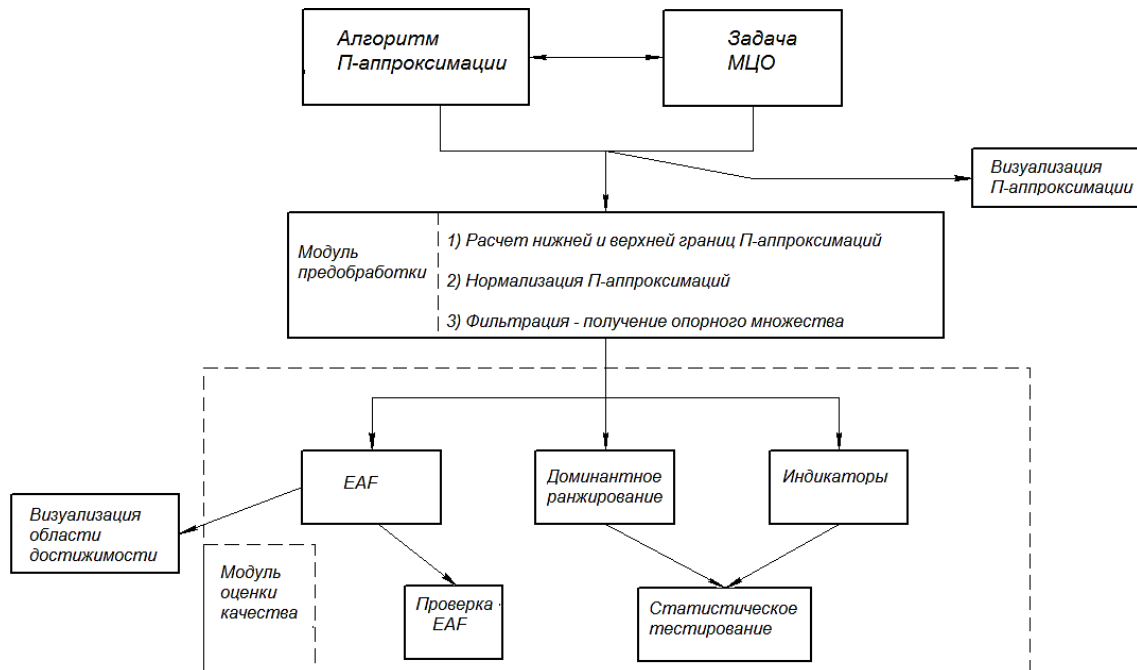


Рис. 2. Взаимодействие подсистем при оценке качества П-аппроксимации

В системе реализованы следующие основные режимы: «Настройка», «Вычислительный эксперимент», «Анализ».

Режим «Настройка» предоставляет ЛПР возможность передать на сервер полученную тем или иным способом П-аппроксимацию, а в качестве ответа системы получить ее визуализацию и соответствующие значения индикаторов качества. Для задания требуемого режима оценки необходимо ввести следующие данные (рис. 3):

Pareto-Q
root ▾

Настройки вычислительного эксперимента

Название эксперимента:

Тип индикаторов: Унарные Бинарные

Индикатор качества:

Первый фронт: Файл не выбран

- имя режима;
- тип индикатора качества - бинарный или унарный;
- индикатор качества (в зависимости от выбранного типа индикатора в выпадающем списке будут представлены реализованные в системе унарные либо бинарные индикаторы);
- один (если выбран унарный индикатор) или два (если выбран бинарный критерий) файла исследуемой П-аппроксимации.

Рис. 3. Экранная форма «Настройка» системы PARETO-Q

Режим «Вычислительный эксперимент» даёт возможность ЛПР выбрать требуемые П-алгоритм и тестовую МЦО-задачу (из числа реализованных в системе). ЛПР также может использовать собственные реализации П-алгоритмов и тестовых задач. Ответами системы в данном режиме являются П-аппроксимация выбранной тестовой задачи (в виде текстового

файла), визуализация этой аппроксимации, а также соответствующие значения всех реализованных в системе унарных индикаторов качества (рис 4).

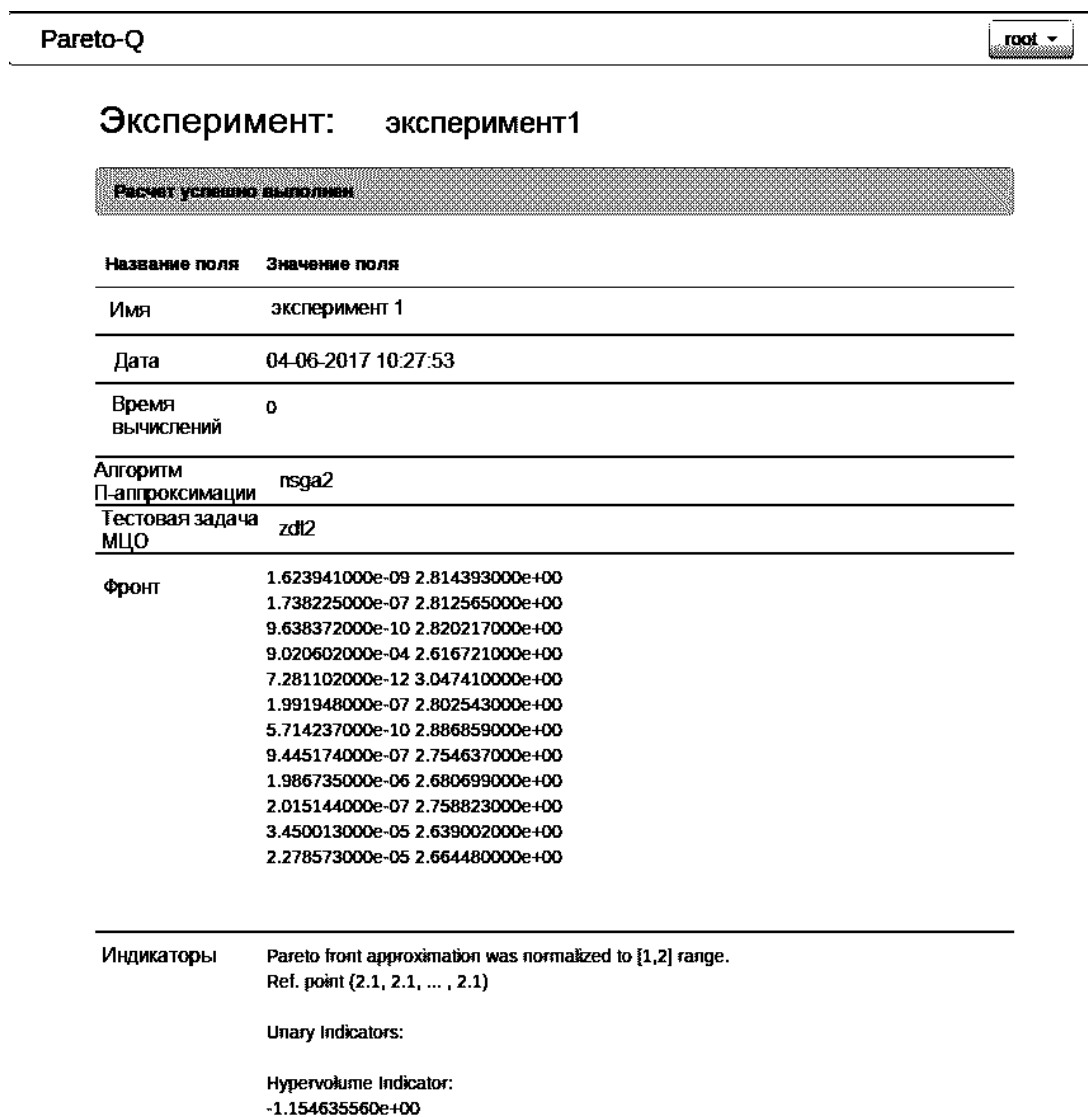


Рис. 4. Пример результатов вычислительного эксперимента в системе PARETO-Q

Режим «Анализ» дает ЛПП возможность выбрать П-алгоритмы и одну или несколько тестовых МЦО-задач, с помощью которых выполняется анализ эффективности этих алгоритмов. В качестве ответа системы ЛПП получает результаты статистического анализа данных, полученных при многократном запуске исследуемых П-алгоритмов.

3. Вычислительные эксперименты. Исследование эффективности разработанного алгоритмического и программного обеспечения выполнено на примере широко известных алгоритмов П-аппроксимации *NSGA-II*, *SPEA-2* и относительно нового алгоритма *IBEA*. В качестве тестовых МЦО-задач использованы двухкритериальные *ZDT1* - *ZDT5* и трёхкритериальные *DTLZ1* - *DTLZ3* задачи.

Исследование проводилось при 150 итерациях каждого из указанных П-алгоритмов. Для каждой пары «алгоритм-задача» выполнено по 30 запусков. Уровень значимости статистических критериев принят равным $\alpha = 0,05$.

В качестве примера приведём результаты, полученные системой для алгоритма *SPEA-2* и тестовой задачи *ZDT3* (рис. 5, а) в сравнении с точным фронтом Парето для той же задачи (рис. 5, б).

В результате доминантного ранжирования с последующим применением критерия Манна-Уитни было выявлено значительное превосходство алгоритма *IBEA* над алгоритмами *NSGA-II*, *SPEA-2* с точки зрения качества П-аппроксимаций, полученных с помощью этих алгоритмов. Сравнение распределений значений индикаторов качества $I_{\varepsilon+}^1$, I_H^- , I_{R2}^1 не позволило обнаружить превосходство какого-либо из исследуемых алгоритмов над остальными. Другими словами, указанные алгоритмы оказались несравнимыми по данным индикаторам качества. Сравнение эмпирических функций достижимости с применением критерия Колмогорова-Смирнова показало наличие существенных различий только в качестве П-аппроксимаций, полученных с помощью алгоритмов *SPEA-2* и *IBEA* [8].

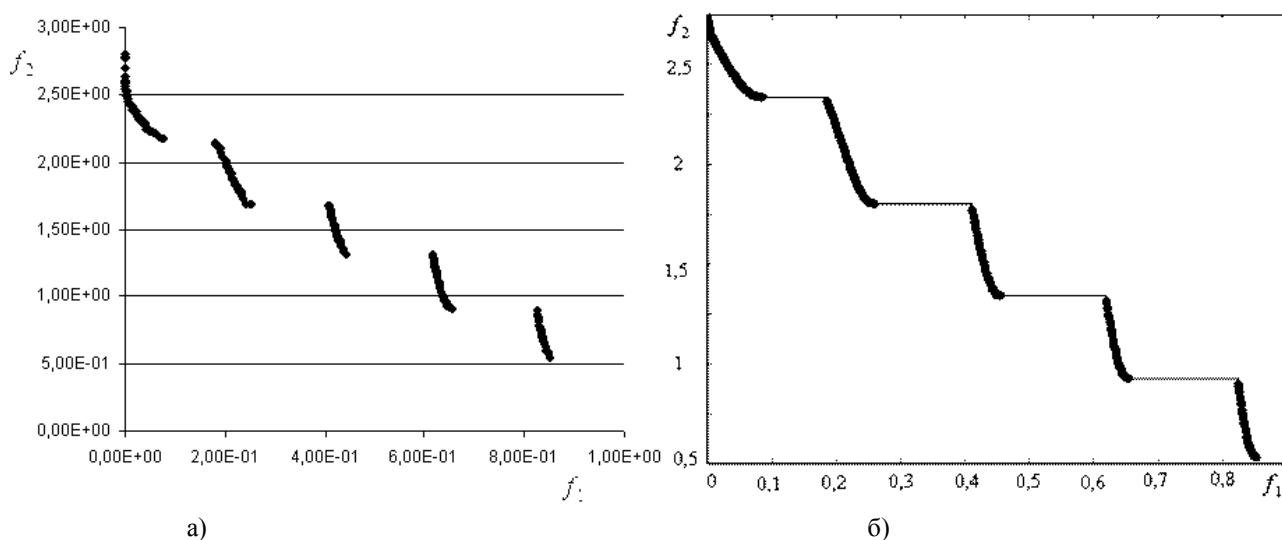


Рис. 5. Тестовая задача *ZDT3*: а) П-аппроксимация с помощью алгоритма *SPEA-2*; б) точный фронт Парето

Заключение. Программную систему *PARETO-Q* отличает от подобных известных систем комплексность подхода и *WEB*-ориентированность. Результаты широкого исследования эффективности системы позволяют сделать вывод об адекватности принятых алгоритмических и программных решений. Поскольку практические МЦО-задачи имеют высокую вычислительную сложность, актуальным является распараллеливание П-алгоритмов для различных классов параллельных вычислительных систем. Архитектурные и программные решения, использованные в системе, позволяют с небольшими затратами реализовать параллельный вариант системы.

Текущий вариант работающей системы доступен по адресу: <http://pareto-q.fvds.ru>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоус В.В., Грошев С.В., Карпенко А.П., Шибитов И.А. Оценка качества Парето-аппроксимации в задаче многокритериальной оптимизации. Обзор программных систем // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2014. № 4. С. 300–320. DOI: 10.7463/0414.0709198 (<http://technomag.edu.ru/doc/709198.html>)

2. Белоус В.В., Грошев С.В., Карпенко А.П., Остроушко В.А. Методы визуализации фронта Парето в задаче многокритериальной оптимизации. Обзор // Труды XX Байкальской Всероссийской конференции «Информационные и математические технологии в науке и управлении», 1-7 июля 2015. Часть I. Иркутск: ИСЭМ СО РАН. 2015. С. 22–29
3. Грошев С.В., Карпенко А.П., Остроушко В.А. Комбинированный метод визуализации фронта Парето в задаче многокритериальной оптимизации, основанный на диагональном пересчете гиперпространства // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. №8. С. 150–164. DOI:10.7463/0816.0844030 (<http://engineering-science.ru/doc/844030.html>)
4. Грошев С.В., Карпенко А.П., Сабитов Д.Р., Шибитов И.А. Программная система PARETO-RATING для оценки качества Парето-аппроксимации в задаче многокритериальной оптимизации // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. (7): 193–214. DOI: 10.7463/0714.0720253 (<http://technomag.edu.ru/doc/720253.html>)
5. Карпенко А.П., Митина Е.В., Семенихин А.С. Популяционные методы аппроксимации множества Парето в задаче многокритериальной оптимизации // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2012. №4. (<http://www.technomag.edu.ru/doc/363023.html>)
6. E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele. Comparison of Multi-objective Evolutionary Algorithms: Empirical Results // *Evolutionary Computation*. Vol. 8(2). 2000. Pp. 173–195.
7. Fonseca C.M., Fleming P.J. Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization // *Proc. of the 5th International Conference on Genetic Algorithms*. San Mateo, California. 1993. Pp. 416–423.
8. Fonseca C.M., Grunert da Fonseca V., Hall A.O. Inferential performance assessment of stochastic optimizers and the attainment functions. In E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele, C.A.C. Coello, D. Corne. *Proceedings of the First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO 2001)*. Berlin, Springer-Verlag. Pp. 213–225.
9. Goldberg D.E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning* // Reading Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company. 1989. P. 201.
10. J. J. Durillo, A. J. Nebro. jMetal. A Java Framework for Multi-Objective Optimization // *Advances in Engineering Software* 42. 2011. Pp. 760–771.
11. Knowles J. A summary-attainment-surface plotting method for visualizing the performance of stochastic multiobjective optimizers // *Computational Intelligence and Applications (Proceedings of the Fifth International Workshop on Intelligent Systems Design and Applications)*. 2005. Pp. 552–557.
12. M. Lukasiewicz, M. Glass, F. Reimann, J. Teic. Opt4J - A Modular Framework for Meta-heuristic Optimization // *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computing Conference*. 2011. Pp. 1723–1730.
13. S. Bleuler, M. Laumanns, L. Thiele, and E. Zitzler. PISA A Platform and Programming Language Independent Interface for Search Algorithms // *In Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. EMO*. 2003. Pp. 494–508.

14. Shaw K. J., Nortcliff A. L., Thompson M., Love J., Fonseca C.M., Fleming P.J. Assessing the Performance of Multiobjective Genetic Algorithms for Optimization of a Batch Process Scheduling Problem // Congress of Evolutionary Computation, Washington D.C. IEEE Service Center. 1999. Pp. 37–45.
-

UDK 519.6

**WEB-ORIENTED SYSTEM FOR QUALITY ESTIMATION
OF PARETO-APPROXIMATION IN MULTI-OBJECTIVE TASKS**

Valentina V. Belous

Senior lecturer, chair «Computer Aided Design»,
e-mail: walentina.belous@gmail.com

Sergey V. Groshev

Senior lecturer, chair «Computer Aided Design»,
e-mail: sgro@newmail.ru

Anatoly P. Karpenko

Dr, Professor, head of chair «Computer Aided Design»,
e-mail: akarpenko@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, 105005 Moscow, 2-nd Baumanskaya str. 5

Abstract. Web-oriented program system PARETO-Q is designed for remote estimating of Pareto-approximating quality in multi-objective tasks. The system is designed to solve the problem of consolidation of Pareto-approximation algorithms and algorithms for evaluating the quality of approximation. We present the software used by the system, the system architecture, and some results of computational experiments.

Keywords: multi-objective optimization, Pareto set, Pareto approximation, Pareto Front, indicators of quality Pareto-approximation.

References

1. Belous V.V., Groshev S.V., Karpenko A.P., Shubitov I.A. Otsenka kachestva Pareto-approksimatsii v zadache mnogokriterial'noy optimizatsii. Obzor programmnykh sistem [Estimating quality Pareto-approximation in task of multiobjective optimization. Program systems review] // Science and Education. Scientific edition of Bauman MSTU. 2014. № 4. Pp. 300–320. DOI: 10.7463/0414.0709198 (<http://technomag.edu.ru/doc/709198.html>) (in Russian)
2. Belous V.V., Groshev S.V., Karpenko A.P., Ostroushko V.A. Metody vizualizatsii fronta Pareto v zadache mnogokriterial'noy optimizatsii. Obzor [Pareto front visualization method in task of multiobjective optimization. Review] // Information and Mathematical Technologies in Science and Management. Treatises of XX Baikal Russian conference, 1-7 June 2015. Vol 1. Pp. 22–29. (in Russian)

3. Groshev S.V., Karpenko A.P., Ostroushko V.A. Kombinirovannyi metod vizualizatsii fronta Pareto v zadache mnogokriterial'noy optimizatsii, osnovannyi na diagonal'nom pereschete giperprostranstva [Combined visualization method of Pareto front visualization in task of multiobjective optimization, based on diagonal hyperspace recalculation] // Science and Education. Scientific edition of Bauman MSTU. 2016. №8. Pp. 150–164. DOI:10.7463/0816.0844030 ([http:// http://engineering-science.ru/doc/844030.html](http://engineering-science.ru/doc/844030.html)) (in Russian)
4. Groshev S.V., Karpenko A.P., Sabitov D.R., Shibitov I.A. Programmnaya sistema PARETO-RATING dlya otsenki kachestva Pareto-approksimatsii v zadache mnogokriterial'noy optimizatsii [Program system PARETO-RATING for quality estimation in multiobjective optimization task] // Science and Education. Scientific edition of Bauman MSTU. 2014. №7. Pp. 193–214. DOI: 10.7463/0714.0720253 (<http://technomag.edu.ru/doc/720253.html>) (in Russian)
5. Karpenko A.P., Mitina E.V., Semenihihin A.S. Populyatsionnyye metody approksimatsii mnozhestva Pareto v zadache mnogokriterial'noy optimizatsii [Populating methods of Pareto set approximation in task of multiobjective optimization] // Science and Education. Scientific edition of Bauman MSTU. 2012. №4. (<http://www.technomag.edu.ru/doc/363023.html>) (in Russian)
6. E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele. Comparison of Multi-objective Evolutionary Algorithms: Empirical Results // Evolutionary Computation. Vol. 8(2). 2000. Pp. 173–195.
7. Fonseca C.M., Fleming P.J. Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization // Proc. of the 5th International Conference on Genetic Algorithms. San Mateo. California. 1993. Pp. 416–423.
8. Fonseca C.M., Grunert da Fonseca V., Hall A.O. Inferential performance assessment of stochastic optimizers and the attainment functions. In E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele, C.A.C. Coello, D. Corne. Proceedings of the First Internal Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO 2001). Berlin, Springer-Verlag. Pp. 213–225.
9. Goldberg D.E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning // Reading Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company. 1989. P. 201.
10. J.J. Durillo, A.J. Nebro. jMetal. A Java Framework for Multi-Objective Optimization // Advances in Engineering Software 42. 2011. Pp. 760–771.
11. Knowles J. A summary-attainment-surface plotting method for visualizing the performance of stochastic multiobjective optimizers // Computational Intelligence and Applications (Proceedings of the Fifth International Workshop on Intelligent Systems Design and Applications). 2005. Pp. 552–557.
12. M. Lukasiwycz, M. Glass, F. Reimann, J. Teic. Opt4J - A Modular Framework for Meta-heuristic Optimization // Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computing Conference. 2011. Pp. 1723–1730.
13. S. Bleuler, M. Laumanns, L. Thiele, and E. Zitzler. PISA A Platform and Programming Language Independent Interface for Search Algorithms // In Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. EMO. 2003. Pp. 494–508.
14. Shaw K. J., Nortcliff A. L., Thompson M., Love J., Fonseca C.M., Fleming P.J. Assessing the Performance of Multiobjective Genetic Algorithms for Optimization of a Batch Process Scheduling Problem // Congress of Evolutionary Computation, Washington D.C. IEEE Service Center. 1999. Pp. 37–45.