УДК:51.7:514.762:911.7

МЕТАТЕОРЕТИЧЕСКОЕ СИСТЕМНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИРОДНЫХ И СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Черкашин Александр Константинович
Д.г.н., профессор, главный научный сотрудник,
зав. лабораторией теоретической географии,
Институт географии им. В.Б. Сочавы СО РАН,
664033, г. Иркутск, ул. Улан-Баторская 1, e-mail: akcherk@irnok.net

Аннотация. Обсуждаются метатеоретические (МТ) основы интертеоретического математического моделирования природных и социально-экономических систем разного рода при реализации математических и информационных технологий. Основные МТ-положения формулируются в терминах дифференциальной геометрии касательного расслоения и слоения на многообразиях с учетом опыта построения полисистемных моделей географической науки. Многообразие трактуется как географическая среда формирования явлений и процессов. Уравнения для их моделирования появляются соответственно в результате послойного отображения оценочных функций в векторные поля состояний и скоростей расслоенного пространства. Точка касания слоя интерпретируется как тип среды реализации моделируемых закономерностей, а ее глобальные координаты как условия средового смещения параметров системы. С учетом этих смещений формируется локальная система координат. Получившиеся МТ-уравнения связи и изменений относительных параметров не зависят от выбора глобальных (внешних) и локальных (внутренних) систем координат. Слоение многообразия среды определяет топологическую и типологическую структуры пространства исследования как геоинформационного источника знаний о неоднородности местных условий. МТ-моделирование выделяет универсальные уравнения и позволяет учесть в расчетах своеобразие систем и их среду через содержательную интерпретацию абстрактных понятий и средовое смещение показателей. Особое значение для МТ-моделирования имеют структуры и функции, связанные со слоями, в частности, подвижные трехгранники и тетраэдры линий и поверхностей. Их аналогами являются формальные категории – коммутативные диаграммы связи понятий, генерирующие законы создания системных моделей разного рода.

Ключевые слова: метатеоретическое знание, интертеоретическое моделирование, полисистемные модели, многообразие среды, средовая относительность, векторные поля и функционалы, уравнения процессов и явлений

Цитирование: Черкашин А.К. Метатеоретическое системное моделирование природных и социальных процессов и явлений в неоднородной среде // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2019. № 1 (13). С. 61–84. DOI: 10.25729/2413-0133-2019-1-06

Введение. Главным среди множества вопросов математического моделирования (ММ) [11, 13, 19, 40] становится вопрос выбора адекватных средств и методов построения моделей, т.е. превращения поставленной практикой содержательной проблемы в математическую задачу и решение ее аналитическими и вычислительными средствами. Особенно это актуально в тех областях исследований природных и общественных процессов и явлений, где формализованные подходы еще не получили необходимого развития. Это связывается со своеобразным «искусством» моделирования [13], предполагающим хорошее представление об объекте и предмете изучения, владение математическими знаниями и в целом с наличием достаточных оснований для построения моделей. Опыт работы в данной области убедительно показывает, что ни одна проблема не решается тем же способом, что используется при обсуждении других проблем: всякий раз приходится искать оригинальные решения, что говорит о многообразии форм и методов ММ.

Распространенный подход к ММ – имитационный, выраженный в прямом использовании статистических данных и математических формул, когда нет иных аналитических оснований для построения моделей. Этот подход, прежде всего, свойственен исследователям, недостаточно понимающим суть проблемы, что обычно встречается в первых постановочных публикациях по теме, но чаще применяется в случае исходной сложности изучаемой системы, что требует проведения многовариантного вычислительного эксперимента [18]. Глубокие исследования и моделирование основываются на теоретических построениях и серьезной математике, как это постоянно происходит, например, в физике [20]. Желание разобраться в основаниях изучаемых связей по существу представляет ядро не только ММ, но и всей науки, поскольку требует выявления и объяснения, скрытых в информационных потоках закономерностей. Модели возникают как результат эмпирических обобщений (индуктивно), как следствие теоретических выводов (дедуктивно) и «третьим методом» познания - по аналогии с эмпирическими фактами и теоретическими построениями, что придает методам ММ универсальность. В связи с этим возникает задача информационного поиска, основываясь на опыте моделирования, общих оснований формирования теорий и моделей для решения задач ММ систем различного рода, т.е. определения метатеоретических принципов системного ММ для реализации алгоритмов математической технологии генерации новых научных знаний.

Для решения поставленной проблемы последовательно рассмотрим ряд общих и частных задач моделирования географических процессов и явлений, решение которых основано на применении результатов касательного расслоения на многообразиях, уделяя особо внимание учету особенностей географической среды в расчетах состояния и изменения природных и социальных систем.

1. Основные понятия и модели.

1.1. Метатеоретическое знание. В информационной технологии системное моделирование подразумевает создание систем моделирования для предметных областей исследования [17] в виде системы моделей объектов, рассматриваемых в качестве систем разного рода. Система трактуется традиционно как упорядоченное множество (структуры) элементов и связей между ними и с окружающей средой. В зависимости от того, как конкретно понимаются элементы и связи, формируются системы разного рода, для которых разрабатываются специальные теории со своим набором базовых понятий, аксиом и фундаментальных законов. Опыт ММ показывает, что даже в простейших случаях для моделирования одного объекта требуется использовать нескольких законов, и одними и теми же моделями могут описываться разные объекты, подчиняющиеся различным законам [19]. В итоге один и тот же объект представляется как множество (полисистема) моделей систем разных теорий, а каждая специальная теория описывает любые объекты, т.е. является предметной интертеорией, сквозным образом объединяющей специальные знания о природных и общественных процессах и явлениях.

Метатеоретический (МТ) уровень познания обычно связывается с философскими, методологическими и общенаучными основаниями теорий [12]. МТ-уровень научной информации – это метатеория всех теорий, возможная регулятивная основа, определяющая правила создания каждой системной теории, своеобразная системология – наука о системах разного рода. В разрабатываемой полисистемной концепции ММ [27, 28, 32, 35], МТ-уровень научной информации находится на границе абстрактной математики и содержательных теорий, отражающих с разных сторон системные свойства реальных объектов [30]. Математическая технология обеспечивает дедуктивный переход от математических форм к МТ-представлению знаний, специальным теориям и формирующимся в рамках каждой теории моделям. В итоге в терминах каждой системной теории создается соответствующая математическая модель объекта, в силу чего возможно множество системных моделей одного и того же объекта – полисистема теоретических знаний и полисистема моделей (полимодель) объекта [27, 28, 32, 35]. Из них выбирается та модель, что наилучшим образом решает поставленную проблему в технологической последовательности процедур системного анализа на основе имеющихся данных и знаний об объекте.

В этом направлении особо актуальны исследования, связанные с разработкой интертеорий и полимоделей сложных географических систем на МТ-основе полисистемного расслоения и моделирования многообразия географической среды, чтобы приблизить географию к уровню математического решения задач в передовых областях науки, дать математическое обоснование ее известных моделей и методов, вывести новые знания. Для этого через полисистему теорий происходит предметное расслоение данных и знаний результатов физико- и экономико-географических исследований территориальной организации [31] на основе идей дифференциальной геометрии, соответствующих уровню МТ-анализа [32]. Такой подход широко используется в современной физической науке [20, 15]. В его основе лежат представления о расслоении множеств и пространств на различных базах, в частности, на гладких многообразиях. Касательное расслоение на многообразиях трудно представить наглядно, поэтому всякие иллюстрации и чертежи полезны для понимания сущности формальных связей и преобразований [15]. Поиск аналогий между понятиями дифференциальной геометрии и реальными процессами, и явлениями затруднен в силу существующего абстрактного изложения математического материала, в связи с чем любые примеры и содержательные интерпретации важны для понимания возможностей использования теории расслоения для МТ-анализа. Наглядное сходство прослеживается в научных процедурах типизации и картографирования, в пространственных и сетевых моделях типа «центр-периферия» и др. [23, 36].

1.2. Расслоенные пространства. И.Л. Герловин [6] дал своеобразную трактовку расслоения в терминах геометрии континуально-дискретных пространств - математической конструкции, в которой рассматривается объемлющее пространство $P{=}M{\times}N{\subset}X$, охватывающее все его элементы и вложенные в него множества подпространств слоев $Y_i{\subset}Y$, базы расслоения M с элементами $i{\in}M$ и слоев $Z_j{\subset}Z$ базы расслоения N с элементами $j{\in}N$. Эти формы представления информации иллюстрируем линейно-сетчатой структурой на рис. 1.

Слои Y_i соответствуют вертикальным, слои Z_j – горизонтальным линиям. Среди них выбираются типичные слои расслоения T_Y, T_z, с которыми сравниваются $Y_i \leftrightarrow T_Y$ все остальные. Постулируется существование типичного объекта-эталона (универсума) и типичной системной теории (общей теории систем). Пространство X называется объемлющим пространством реальности, пространством (множеством) расслоения, пространства Y и Z – расслоенными пространствами соответственно на базах M и N. Пространство $Q=Y\times Z\subset X$ задает структуру объемлющего пространства X, а $P=M\times N$ – это своеобразный информационный код с элементами (i,j).

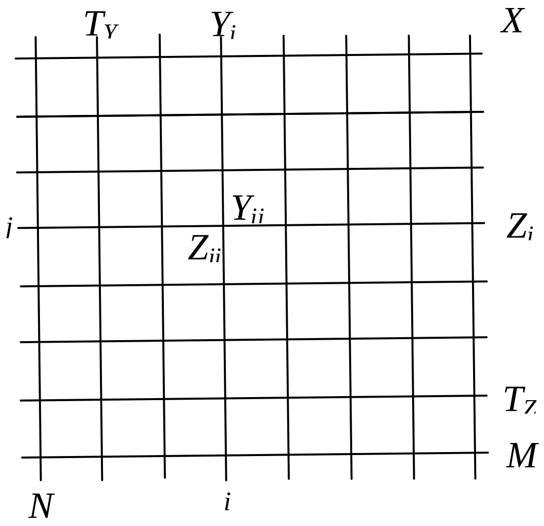

Рис. 1. Линейно-сетчатая структура $M\times N$ расслоения на независимых многообразиях объектов M и предметов N исследования и моделирования (здесь и далее пояснения в тексте).

В общем случае расслоением называется отображение $\pi:X\rightarrow M$, обратное которому $\pi^{-1}:M\rightarrow X$ разбивает непрерывное пространство расслоения X на множество $Y=\{Y_i\}$ непересекающихся дискретных слоев Y_i, соответствующих элементам $i\in M$. В частности, по И.Л. Герловину, наблюдаемое физическое подпространство является базой M объектного расслоения, вне которой находятся подпространства Y_i, где проявляется скрытая структура элементов (объектов) i и осуществляются их скрытые взаимодействия в объемлющем пространстве физической реальности X. Он считает, что разработанный математический аппарат может быть использован не только в физике, но и в других естественных и общественных науках, поэтому в общем случае пространство X является всеобъемлющим. Реальные свойства объектов i формируются по законам расслоенного пространства Y, поэтому невозможно рассчитать значения этих свойств средствами наблюдаемого пространства M. Для полного описания существующего объекта i в Y_i его необходимо представить одновременно в разных слоях $Z_j\in Z$ всеобъемлющего расслоенного пространства $Q=Y\times Z$. Связанное с ним пространство $P=M\times N$ может быть любой размерности, т.е. объединять разные основания расслоений, на пересечении которых кодом (i, j) обозначаются разнообразные познавательные ситуации j с объектами i.

Эти положения иллюстрируют закон системности Ю.А. Урманцева [24], согласно которому все объекты i существуют и выделяются как системы Y_{ij} одного j или разного рода. Любой объект-система Y_i принадлежит хотя бы одной системе объектов Z_j данного рода j. Слой Y_{ij} является пересечением, т.е. элементом декартового произведения $Q=Y\times Z$, объектного Y_i и предметного слоя Z_j (см. рис. 1). Множество $Y_i=\{Y_{ij}\}$ представляет объект как полисистему, а множество $Z_j=\{Z_{ji}\}$ объединяет объекты-системы одного рода j, одной предметной области исследований и моделирования. Множество $Y=\{Y_i\}$ есть множество объектов, а $Z=\{Z_j\}$ – множество предметов исследования. Пространству Z_j соответствует системная интертеория j-го типа, а системе Y_{ij} - модель объекта i, сформулированная на языке j-й теории. В этом контексте элементы j базы N расслоения реальности X по слоям Z_j отражают специальное понимание объекта как системы особого рода j и связаны с инвариантами и базовыми понятиями j-й интертеории. Системная модель объекта Y_{ij} является проекцией объекта i в теоретический слой Z_j, или j-м срезом объекта в этом слое. В итоге реализуется своеобразная комбинаторика слоев $Y_{ij}=Y_i \times Z_j$ – синтез двух объектных и предметных начал M и N. Отсюда появляется возможность проективного $Y_i \rightarrow Z_j$ и альтернативного $Z_k \leftarrow Y_i \rightarrow Z_j$ моделирования разнокачественных объектов Y_i.

Далее, по И.Л. Герловину [6, с.37], все слои дополнительны и рассматриваются относительно друг друга как бы находящиеся в мнимой, другой области пространства X (принцип пространственного полиморфизма). В этом смысле они являются противоположностями, независимыми, не пересекающимися, параллельными или ортогональными друг другу формами, в частности, образуют своеобразное конфигурационное пространство обобщенных координат $Z=\{Z_j\}$ представления объектов $Y=\{Y_i\}$ разными способами $Y_i=\{Y_{ij}\}$. Условием функциональности объектов и их математических моделей в терминах расслоенных пространств является "пространственный метаморфоз", что определяет существование связей различных геометрических форм (систем) Y_{ij} одного и того же объекта Y_i в подпространствах Z_j всего объемлющего пространства реальности X [6]. Все слои одной базы M или N имеют согласованные структуры и функции. Для этого между слоями имеется информационная связь в виде морфизмов-отображений слоя в слой, что является основанием для их сравнения и вывода свойств одного слоя из другого. Системы морфизмов слоев описываются в терминах формальных категорий, где объектом категории является слой, а морфизмы-стрелки соответствуют их связям, удовлетворяющим условию коммутативности. Появляется возможность создавать новые модели и теории по образу и подобию известных моделей и теорий [26–29].

Главным условием функциональной связности объектов Y_i является наличие коммутативных отображений между их системными слоями Y_{ij} [6]. В этом случае объект рассматривается как сложная система – комплекс. Отображения-морфизмы могут быть полными (изоморфизм, подобие), формирующими отношения эквивалентности слоев, и неполными, когда связи слоев реализуются с потерей информации, с ростом энтропии. В последнем случае сложность объекта снижается, его целостность нарушается, существование прекращается. По этой причине в комплексе разные системные модели Y_{ij} эквивалентны, а в не-комплексе каждая из них по-своему описывает только одну сторону процесса или явления, т.е. сложные системы проще в смысле реализации процедур ММ, когда модель одного типа дает полное представление о состоянии и поведении сложной системы в целом.

Изложенная МТ-методология решения задач ММ позволяет получить выводимое знание из определения расслоения пространств разного свойства, т.е. создавать в виде категорий различные формальные онтологии. Для этого необходимо по аналогии со структурами и функциями эталонных образцов T сформировать новые теории и на их основе построить системные модели, в которых своеобразно понимаются элементы и связи. При этом необходимо исходить из абстрактных представлений, и для эффективного использования математики требуется проследить весь путь от абстрактного к наблюдаемому конкретному знанию.

1.3. Касательные расслоения. Аналитические соотношения ММ получаются при использовании в качестве базы расслоения гладких, необходимое число раз дифференцируемых многообразий – основных объектов дифференциальной геометрии. Такие многообразия *M* – это хаусдорфовые отделимые пространства со счетной базой, локально похожие на евклидовые линейные пространства R^n размерности n [4]. Многообразия обобщают представления о поверхности [16], что задаются выпуклыми функциями $F=F(x)$ переменных *x* в координатах $x=\{x_k\}$ (k=1,2,..,n) *n*-мерного объемлющего (тотального) пространства *X*. Поверхность многообразия *M*, или скалярное поле на *X*, задаются функциями в неявном виде $G(x)=0$, в явном виде $F=F(x)$ или вектор-функцией $R=R(\boldsymbol{r})$ радиус-вектора $\boldsymbol{r}=x(u,v)$, вычерчивающей эту поверхность в соответствии со значениями координат $x_k(u,v)$ в зависимости от изменения параметров (u,v). Начало вектора находится в начале *O* заданной системы координат (системы измерения), а конец - в точке (R,x) на поверхности $R=R(\boldsymbol{r})$ (рис.2). Линии-пути γ_x, η_x на поверхности параметрически описываются вектором $R=R(\boldsymbol{r})$ в координатах $x(t)$, значение которых зависит от произвольного параметра, например, времени *t*, или от естественного (натурального) параметра $x(s)$, где *s* – в некотором смысле расстояние вдоль линии пути от ее начала *s*=0.

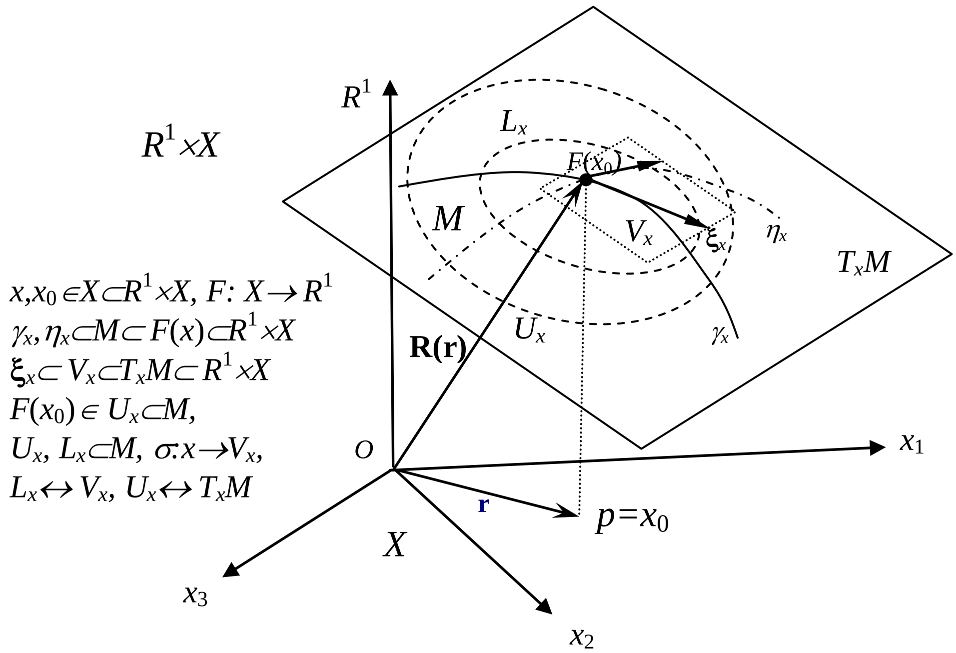

Рис. 2. Схема касательного расслоения на многообразии *M* с выделением касательного слоя T_xM, локального векторного пространства $V_x\subset T_xM$, слоя слоения $L_x\subset M$ и окрестности $U_x\subset M$ точки x_0.

Например, вектор $R=R(\boldsymbol{r})$ с началом в центре масс Земли формально описывает форму рельефа $F=F(x)$, где в качестве параметров (u,v) используются сферические географические координаты. Уклон местности определяется вектором градиента - направлением и величиной наибольшего возрастания скалярного поля $F(x)$:

$$V(a)=\nabla F=\operatorname{grad} F=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}\mathbf{i}_k,\ a=\{a_k\},\ a_k=\frac{\partial F}{\partial x_k},\ \partial_k=\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{i}_k, \qquad (1)$$

где $\mathbf{i}_k$ - элементарные независимые векторы (орты) по каждому координатному направлению x_k, определяющие базис исходного физического векторного пространства; $a=\{a_k\}$ – компоненты двойственного ковекторного пространства, дуального исходному $x=\{x_k\}$. От величины уклона и в целом от градиента различных скалярных полей на планете зависят все географические процессы, что принимается во внимание при создании климатических, геоморфологических, экономических и социальных потоковых моделей территориальной системы, ее преобразования в неоднородном физическом пространстве. В формуле для ∂_k символ $\mathbf{i}_k$ фактически дублирует символ $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ дифференцирования по направлению. По этой и другим формальным соображениям символ $\mathbf{i}_k$ упускается, и база векторного пространства задается реперами ∂_{pk} локальной системы координат (СК) с началом в точке p, что позволяет перейти к более широкой (немеханистической) трактовке многомерного пространства независимых признаков R^n разнокачественных систем.

С математической точки зрения оказывается неважно, какой конкретный вид имеет функция $F(x)$ для поверхности, особенно в случае ее неявного задания, поэтому в качестве многообразия M обычно рассматривается само пространство $M\subset X=\mathrm{R}^n$. Однако для наглядности считается, что M является, например, двумерной выпуклой поверхностью, описываемой соответствующими функциями $F{:}X\to\mathrm{R}^1$ и дополнительной координатой R^1 многомерного пространства (F, x), что позволяет получать объясняющие уравнения ММ.

Формально, для каждой точки многообразия $p\in M$ определена окрестность U_p – открытое множество $U_p\subset M$, $p\in U_p$. Топологическим n-мерным многообразием M называется пространство, каждая точка p которого обладает окрестностью U_p, гомеоморфной открытому множеству $D_p\subset\mathrm{R}^n$ (пространству реального существования или научного представления реальности $x\in\mathrm{R}^n$). Картой в наблюдаемом пространстве M называется пара (U_p,φ_p), где φ_p – гомеоморфизм $\varphi_p{:}U_p \to D_p\subset \mathrm{R}^n$. Это позволяет задавать координаты точек $p\in M$ соответствующими глобальными $x_p=\{x_{pk}\}$ и локальными $y_p=\{y_{pk}\}$ координатами множества $D_p\subset\mathrm{R}^n$. Локальные координаты точки y всегда зависят от ее глобальных координат: $y=y(x)$. Совокупность карт (U_p,φ_p) точек $p\in M$ называется n-мерным координатным атласом, если объединение U_p совпадает с M [3]. Так происходит при топографическом картографировании земной поверхности, когда отдельный участок местности $U_p\subset M$ в окрестности пункта $p\in M$ отображается на соответствующую топокарту D_p. Совокупность таких карт составляет атлас карт с координатами, соответствующими географическим координатам участка. Всякое топологическое многообразие M является пространством, обладающим атласом, состоящим из счетного множества карт D_p. Требование отделимости предполагает, что у любых двух точек p и q из M всегда есть окрестности, которые не пересекаются, но существуют и перекрывающиеся области этих точек, в которых необходимо согласование локальных координат (J_{pq} – матрица Якоби):

$$y_q = J_{pq}y_p,\; J_{pq} = \left(\frac{\partial y_{qk}}{\partial y_{pk}}\right). \tag{2}$$

Вариантами множества D_p могут быть разные подпространства пространства $X=\mathrm{R}^n$, например, касательные слои $T_pM\subset X$. Отображение сравнения (2) по сути, переводит, количественно интерпретирует информацию одного слоя в информацию другого, устанавливает эквивалентность карт, в частности, их тождество, когда J_{pq} – единичная матрица.

В общем случае, расслоением называется четверка (X,M,π,T), где X – пространство расслоения, M – база расслоения с непрерывной, так и дискретной топологией. Проекция

π:$X \rightarrow M$ ставит в соответствие каждой точке $p \in M$ слой $T_pM \subset TM$, например, касательную (гипер)плоскость к поверхности M в точке p. Пространство T называется типичным слоем расслоения, образующим расслоенное пространство $TM=M\times T$ как прямое произведение многообразия и типичного слоя, которое с проекцией на первый сомножитель π:$M\times T \rightarrow M$ дает тривиальное расслоение с базой M и типичным слоем T. Аналогично проекция π_0:$M\times T\rightarrow T$ на второй сомножитель является тривиальным расслоением с базой T и типичным слоем M. Такая ситуация проиллюстрирована на рис.1 для прямого произведения $X\times Y$, где T соответствует универсальному объекту T_Y или предмету T_Z исследования и моделирования.

Типичный (общий, модельный) слой T расслоения является эталоном моделей в виде структур или функций, послойно заданных на многообразии, которые с изменениями можно индуцировать в других слоях по правилу (2). Это означает, что пространство расслоения TM представляет собой объединение множества непересекающихся слоев T_pM, каждый из которых диффеоморфен типичному слою T и отмечен точкой базы p. Кроме того в определении расслоения должно реализоваться условие, чтобы дифференцируемые структуры на многообразиях X, TM, M и T были коммутативно согласованы между собой в целом и по каждой карте [9]. Для касательного расслоения размерности базы и типичного слоя совпадают, поэтому расслоенное пространство $TM=M\times T$ имеет удвоенную размерность по сравнению с многообразием M.

Расслоенное пространство $TM=\{T_pM\}$ пространства расслоения $X=\mathrm{R}^n$ соответствует морфизму π^{-1}:$M\rightarrow TM$ для всех точек $p\in M\subset X$, и π:$TM\rightarrow M$. В структуре конкретного слоя T_pM выделяется индивидуальный центр – точка p с координатами $x_p=\{x_{pk}\}$ в пространстве X, и ядро-карта V_p, соответствующая открытой окрестности U_p (π^{-1}:$U_p\rightarrow V_p$), где имеется наибольшее сходство свойств многообразия и данного слоя T_pM. Остальное пространство слоя $T_pM \setminus V_p$ трактуется как периферия. Такие построения задают естественную структуру для распространенных моделей типа «центр-периферия» [23, 36].

В каждом слое с началом в этом центре $y_p=\{0\}$ строится локальная СК $y_p=\{y_{pk}\}$ ядра V_p, совпадающая с координатами окрестности U_p точки $p\in M$ на многообразии, и внутренняя СК $\xi=\{\xi_{pk}\}$ слоя T_pM. Причем $y_{pk} = x_k - x_{pk}$ и $\xi_{pk}=\xi_{pk}(y_p)$, т.е. вектор ξ определенным образом трансформирует СК x и y. Векторное поле ξ - это гладкая векторная функция (набор функций) на многообразии M, значение которой в каждой точке – вектор V_p с началом в точке $p\in M$, касательный к M и лежащий в T_pM. Векторное поле на M называется сечением касательного расслоения σ: $M\rightarrow TM$ (см. рис. 2).

На связном открытом многообразии M помимо касательного расслоения может быть сформировано соответствующее слоение размерности m, определяющее специальное членение пространства M размерности n [21, 32]. Разность n-m называется коразмерностью слоения. На M задается слоение коразмерности 1, если M наделено разбиением на линейно связные подмножества L_p - слои слоения $L=\{L_p\}$ - со следующим свойством: в окрестности U_p любой точки $p\in M$ найдется локальная СК x_p:$U_p\rightarrow \mathrm{R}$, в которой связные компоненты множества $L_p\cap U_p$ состоят из решений x_n=const. Конкретно, слоение коразмерности 1 - это разбиение M на непересекающиеся подмножества L_p, которые локально выглядят как поверхности уровня гладких регулярных функций. Для поля на двумерном пространстве аналогом поверхности уровня является изолинии, например, горизонтали высот на топокарте. Поверхностями уровня для скалярного поля на R^n являются гиперповерхности L_p размерности n-1. Слоение локально устроено как семейство параллельных плоскостей размерности m в евклидовом пространстве n. Слои слоения L_p подобно изолиниям не пересекаются, полностью покрывают M и определяют его топологический базис. Слои L_p имеют одну x_n=const, несколько или все постоянные значения координат (уровней). Слоение устанавливает на M отношения эквивалентности точек $M\times M_p\to M_p$, т.е. формирует M как фактор-пространство, в котором слой L_p соответствует множеству точек одного типа (уровня). Типологическая структура многообразия M определяет его пространственную неоднородность, причем контур-ареал слоя L_p может состоять из нескольких фрагментов в разных местах многообразия, как на типологической карте природной среды.

Любое локально тривиальное расслоение π: $Z\times Y\to Y$ является слоением (см. рис. 1, где Z задает уровень слоя). Теория слоений разрабатывает методы качественного (топологического) исследования дифференциальных уравнений. Теория касательного расслоения предлагает количественные методы таких исследований и моделирования.

1.4. Каноническое векторное поле. Количественные связи переменных, функций и слоев проясняет первая дифференциальная форма (Пфаффа) в виде полного дифференциала функции $F(x)$ разных наборов переменных $x\in M$ [15, с. 186–187]:

$$a)\ dF=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}dx_k=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)dx_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}dx_k,\ б)\ d=\sum_{k=1}^{n}dx_k\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{3}$$

Коэффициенты a дифференциальных форм разного порядка (dF, d^2F) определяют тензорное поле на многообразии. Соотношение (3б) выражает сумму произведения двух двойственных, независимых элементарных векторов с компонентами $\partial_k=\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ и dx_k (рис.3). Векторы $\partial=\{\partial_k\}$ в каждой карте образуют базис касательного пространства T_pM векторов с компонентами $\xi_p=\{\xi_{pk}\}$:

$$\boldsymbol{\xi}_p=\sum_{k=1}^{n}\xi_{pk}\frac{\partial}{\partial x_k}=\sum_{k=1}^{n}\xi_{pk}\partial_k\ . \tag{4}$$

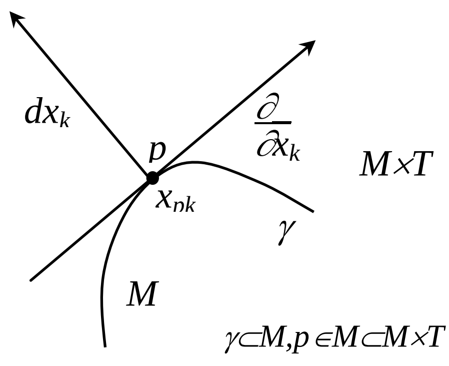

Рис. 3. Двойственные элементарные координатные векторы ∂x_k и dx_k касательного векторного и ковекторного полей по линии γ в точке p

Отображение π:$TM\to M$ ставит в соответствие каждому касательному вектору $\boldsymbol{\xi}_p$ точку касания $p\in M$, в которой он задан в слое T_pM. Вектор $\boldsymbol{\xi}_p$ - это линейный функционал или оператор дифференцирования, подобный d в (3б):

$$\boldsymbol{\xi}_p(F)=\sum_{k=1}^{n}\xi_{pk}\frac{\partial F}{\partial x_k}\ . \tag{5}$$

Дифференцирование разных функций осуществляется по направлению вдоль векторного поля.

Каждый вектор $\xi_p(F)$ является касательным вектором соответствующей линии γ на поверхности $F(x)$ из множества линий, проходящих через точку $p\in M$ (см.рис.2). В каждой точке с координатами x формируется пучок векторов $V_x = \{\xi_x\}$ и прямых линий такой, что направляющий вектор всякой прямой, касающейся поверхности в данной точке, является линейной комбинацией координатных векторов $\partial_p=\{\partial_{pk}\}$, соответствующих этой точке. Пучки векторов и линий обладают симметрией и структурой проективной топологии с центром $p\in M$, поэтому слои расслоенных пространств представляют конгруэнции различных линий и плоскостей.

Касательной гиперплоскостью (слоем) T_pM к многообразию M в точке p называется линейное пространство касательных векторов в этой точке. С каждой локальной СК касательная плоскость T_pM получает каноническую СК, в частности, координатный репер $\partial_p=\{\partial_{pk}\}$. Для определения векторного поля $V=\{V_x\}$ на многообразии M необходимо задать его компоненты послойно V_x в некотором атласе и указать правило преобразования координат вида (2) [9]:

$$dx_q = J_{pq}dx_p,\ J_{pq} = \left(\frac{\partial x_{qk}}{\partial x_{pk}}\right), \partial_q = J_{qp}\partial_p,\ J_{qp} = \left(\frac{\partial x_{pk}}{\partial x_{qk}}\right). \tag{6}$$

Векторное поле V на многообразии M является инвариантным геометрическим объектом, не зависит от выбора СК и атласа.

Множество ξ_p разных точек $p\in M$ с координатами x_p задает векторное поле, которое определяет увеличение значений функций по направлению вектора. Зная характеристики векторного поля, появляется возможность восстановить вид функции $F(x)$. Разные функции $F(x)$ определяются на точках многообразия $x\in M$ в виде отображения $F{:}M\to \mathrm{R}^1$. Конкретный вид функции $F(x)$ на практике обычно неизвестен, поэтому основной вопрос математической технологии состоит в том, как восстановить $F(x)$ по набору функций разных касательных слоев, опираясь на дифференциальные свойства многообразий относительно соответствующих расслоенных пространств. Касательное расслоение пространства – это пространственная система, в которой каждая точка пространства $x\in M$ и соответствующие ему функции $F(x)$ рассматриваются как вход-терминал в дополнительные измерения. Расслоенное пространство TM имеет удвоенную размерность $2n$, поскольку каждая точка $y\in T_pM$ определяется внешними координатами $x_p=\{x_{pk}\}$ ($k=1,2,\ldots n$) тотального пространства $X=\mathrm{R}^n$ и соответственно локальными координатами $y_p=\{y_{pk}\}$ выделенной точки p с базой $dx=\{dx_{pk}\}$ и внутренними координатами вектора $\xi_p=\{\xi_{pk}\}$ в подпространстве каждого касательного слоя T_pM с базой $\partial_p=\{\partial_{pk}\}$ (см. рис. 3). Поверхность $F(x)$ является огибающей множества слоев и может быть восстановлена на основе особенностей функций расслоенного пространства TM.

Для любой выпуклой дифференцируемой функции $F(x)$ справедливо касательное преобразование Лежандра $F(x)\to\Phi(a)$ [14], переводящее функцию исходного набора переменных $x=\{x_k\}$ в функцию $\Phi(a)$ дуальных переменных $a=\{a_k\}$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \Phi(a), \tag{7}$$

где b = - $\Phi(a)$ = $F(0)$ - свободный член линейного неоднородного уравнения (7). Это позволяет по пространственным и временным рядам данных $x(t)$ статистически восстанавливать вид функции $\Phi(a)$. В разных отраслях науки [5, 34, 41] давно отмечено наличие линейной связи b с коэффициентами $a = \{a_k\}$:

$$\Phi(a) = F_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i x_{pi}. \tag{8}$$

В этом случае, рассматривая $x_p=\{x_{pk}\}$ в качестве точки касания, приходим к

$$f(y, x_p) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial f}{\partial y_k}(y, x_p) = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k, \ , \ \xi = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial}{\partial y_k} \ , \tag{9}$$

где $f(\cdot)$ является однородной функцией первого порядка по y, и компоненты вектора ξ соответствуют $\xi_k = y_k$ значениям локальной СК, откуда вектор $\xi(\boldsymbol{y})=\mathbf{y}$ является вектором канонического эйлерова поля [2], отражающего состояния (y, x_p) систем. Для объектов в этих координатах осуществляется параллельный перенос без изменения формы, поэтому уравнения $\xi(f)=f$ в слое T_pM соответствует такому же уравнению другого слоя. Это означает тождественное преобразование координат (2) и говорит о простоте и универсальности билинейных по y и a моделей вида (9). При ММ основной задачей является определение на основе соотношения (7) переменных компонентов ковектора $a = \{a_k\}$, величина которых зависит от вида функции $f(\cdot)$ и текущих значений $y = \{y_k\}$.

Здесь есть прямая аналогия со свойствами пространства Финслера [37], в каждом слое которого реализуется функция связи координат $f(y, x_p)$ как метрика этого пространства, удовлетворяющая формуле (9). Для каждой модели связи переменных в уравнении (9) задаются свои функции $F(x)$ и метрики-оценки $f(y, x_p)$, имеющие различный содержательный смысл. Набор таких независимых функций формирует новое координатное пространство моделирования с канонической вектор-функцией ξ вида (9). Все модели связи имеют эквивалентный вид симметрического преобразования $\xi(f)=f$. Для статистической достоверности соотношений (9) проверяется гипотеза линейной зависимости (8) коэффициентов билинейных уравнений.

Функции $f(y, x_p)$, 1-однородные по первому аргументу $y=\{y_k\}$, обладают уникальным свойством: все касательные линии и плоскости к этим функциям в разных точках пересекаются в центре - начале локальных координат y =0 [10], образуют пучки разной размерности из геометрических объектов, симметричных относительно аффинного поворота вокруг этого центра [2] и формирующих проективную топологию пространства слоя [9]. Уравнение (9) можно рассматривать как расширенный вариант базовой формы (3а), когда дифференциалы dx_k в окрестности точки $x = \{x_k\}$ заменяются конечными разностями $y_k=\Delta x_k=x_k-x_{pk}$, что соответствует заявленным свойствам многообразия M быть локально линейными.

Первыми интегралами дифференциального уравнения $\xi(f)=f$ являются функции вида

$$c_k = \frac{f}{y_k}, c_{kl} = \frac{y_k}{y_l}, \tag{10}$$

где c_k, c_{kl} - однородные координаты СК, разные функции от которых определяют решения этого уравнения. Производная первых интегралов по направлению векторного поля $\xi(c_k)=0$, $\xi(c_{kl})=0$, т.е. их значения сохраняются (постоянны) на любых решениях уравнения.

Система уравнений (9) является автономной [2, с.95], т.е. функции $f(y,x_p)$ переходят в себя $\xi(f)=f$ при сдвигах во времени, т.е. $f(\cdot)$ здесь явно не зависит от времени t. Эти уравнения описывают разнообразные явления самостоятельного преобразования систем без переменного внешнего влияния (установившиеся процессы). Если $f(y,x_p)$ - решение автономной системы дифференциальных уравнений (в векторном виде), то эта функция остаётся решением и при сдвиге аргумента $x=y+x_p$. Это означает, что функции связи явлений в локальных y и глобальных x координатах эквивалентны.

Процессы трансформации описываются системой неавтономных уравнений, явно зависящих от времени. В этом случае соотношения (3) принимают вид

$$a)\,\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}v_k\frac{\partial f}{\partial y_k},\ б)\,\xi=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}v_k\frac{\partial}{\partial y_k},\ v_k=\frac{dx_k}{dt}=\frac{dy_k}{dt}. \quad (11)$$

где v_k - скорость изменения переменных x и y со временем. Касательные векторы ξ задают векторное поле скоростей и направлений изменения функций $f(t,y(t),x_p)$ вдоль этого поля по параметру t. Уравнения (11а) - это своеобразные потоковые уравнения вида $df/dt=\xi(f)$ для временного изменения f по разным направлениям $y=\{y_k\}$. Вектор df/dt направлен по касательной к линии $f(t)$ на поверхности, заданной вектор-функцией $R=R(\boldsymbol{r})$ вектора $\boldsymbol{r}$ $(u(t),v(t))$.

1.5. Сопровождающий трехгранник и тетраэдры поверхности. С каждым слоем связаны разнообразные соприкасающиеся структуры и функции, позволяющие создавать различные модели. Пусть $\mathbf{f}(t)$ – параметрическое векторное выражение регулярной кривой γ с компонентами $\mathbf{f}(t)=\{f_k(t)\}$. Вектор $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{f}'=d\mathbf{f}/dt$ - производная от радиуса-вектора постоянной длины точки кривой по параметру t есть вектор, направленный по касательной к этой кривой. Вектор $\mathbf{f}''=d^2\mathbf{f}/dt^2$ направлен по главной нормали $\mathbf{n}=\mathbf{f}''/|\mathbf{f}''|$ к кривой в соприкасающейся плоскости, проходящей также через вектор $\boldsymbol{\tau}$. Нормаль $\mathbf{b}=\mathbf{f}'\times\mathbf{n}$, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется бинормалью [7] (рис. 4).

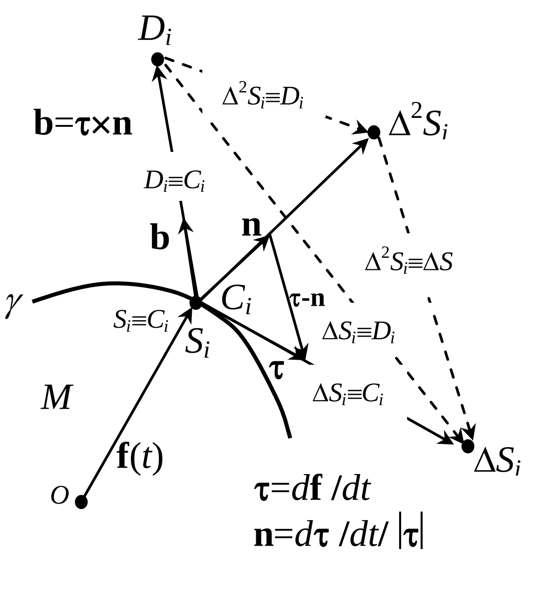

Рис. 4. Сопровождающий трёхгранник $(\boldsymbol{\tau},\mathbf{n},\mathbf{b})$ и соответствующая формальная категория связи системных понятий.

Набор ортогональных векторов $(\boldsymbol{\tau},\mathbf{n},\mathbf{b})$ определяет в каждой точке кривой γ трёхгранник с тремя прямыми углами при вершине, совпадающей с точкой на кривой. Он называется сопровождающим (основным, натуральным) трёхгранником Френе. Трёхгранник позволяет связать с каждой точкой на кривой γ прямоугольную систему координат (см. рис. 4). Трехгранник не зависит от способа параметризации функции $\boldsymbol{f}$ кривой по произвольным t или натуральным s параметрам. Векторы трёхгранника меняются при движении точки по кривой. Эти изменения описываются формулами Френе как результат взаимодействия единичных векторов $(\boldsymbol{\tau},\mathbf{n},\mathbf{b})$ с учетом коэффициентов кривизны и кручения кривой.

Сопровождающий трехгранник (ортонормированный репер в трёхмерном пространстве), является своеобразной надстройкой над слоем, определяющей дополнительную **с**труктуру слоя наподобие различных функций, увлекаемых векторным полем вида (4) или (11б).

Имеется также возможность определить не линию, а поверхность компонентами движения тетраэдра. Пусть **M** – произвольная точка поверхности с переменными координатами, заданных в R^3 тремя функциями $\mathbf{f}(u,v)=\{f_k(u,v)\}$ параметров (u,v). К точке **M** присоединяется еще три точки $\mathbf{M}_1$**,** $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_3$, не лежащие в одной плоскости и вместе определяющие положения вершин тетраэдра $\mathbf{T}(\mathbf{M},\mathbf{M}_1,\mathbf{M}_2,\mathbf{M}_3)$, который принимается за координатный тетраэдр при определении всех точек и линий, связанных с точкой **M** поверхности [36]. С изменением параметров (u,v) точка **M** передвигается по поверхности, и тетраэдр **T** переходит в новое положение. Объект $\mathbf{f}(u,v)$ будет по-разному выглядеть в разных системах координат **T**.

Идеи сопровождающего трехгранника и тетраэдра интересны с точки зрения организации и трансформации онтологического пространства знаний – связей понятий, моделируемых векторами-стрелками (морфизмами, функциями) их отображений φ_{ij}: $Y_i \rightarrow Y_j$ в категориях объектов расслоенных множеств $Y=\{Y_i\}$. С каждой стрелкой φ_{ij} связано два специальных объекта категории: её начало Y_i и конец Y_j – множества определения и значений функции φ_{ij}. В связи с этим вектор можно рассматривать как комбинацию множеств φ_{ij}:Y_iY_j, соответствующему новому множеству $Y_iY_j \rightarrow Y_k$. По этой причине категории организуется в треугольные $Y_iY_jY_k$ и более сложные коммутативные $(Y_iY_k \equiv Y_jY_k)$ диаграммы связи объектов-категорий через стрелки-морфизмы, что выглядит как векторное поле (система) передачи информации от объекта к объекту категории.

1.6. Векторная организация знаний. Сопровождающий трехгранник или тетраэдр выражают элементарные коммутативные диаграммы отображения из одного слоя информации в другой, связывает начальные и конечные позиции стрелок разными способами в тетраэдр (симплекс) (см. рис. 4). Стрелки отражают разные отношения типа причинно-следственных и логических связей ($\rightarrow$), тождества противоположностей ($\leftrightarrow$, $\equiv$), равенства различного (=). В категориях они могут быть взаимно направлены, оборачиваться или исчезать в зависимости от результатов трансформации векторного поля. Разность векторов вида $\Delta\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}-\mathbf{n}$ – вектор, соединяющий их концы – рассматриваются как новое знание, устанавливающее связь исходных понятий, результата их коммутации (вывода).

Согласно смысловому содержанию векторов трехгранника выделяются четыре независимых множества $(\mathbf{f},\boldsymbol{\tau},\mathbf{n},\mathbf{b})$ компонентов $(\mathrm{f}_i,\tau_i,\mathrm{n}_i,\mathrm{b}_i)$. В обобщенном смысле их можно трактовать соответственно как множества систем S_i, их изменений ΔS_i, ускоренных изменений $\Delta^2 S_i$ и действий D_i. Дополнительно рассматриваются инварианты слоя C_i, соответствующие началу координат - точки касания x_p к поверхности, что отображено в формуле $f_p(y) = f(y, x_p)$ В этом смысле каждое многообразие есть множество точек инвариантов – начал разных локальных систем координат (категорий связи знаний). Элементы перечисленных множеств с помощью стрелок и их аналогов попарно сочетаются (комбинируются), формируя некоторые законы-высказывания [9], базовые из которых следующие

$$1)\ S_i \equiv C_i,\ 2)\ \Delta S_i \equiv C_i,\ 3)\ \Delta S_i \equiv D_i. \tag{12}$$

Их можно считать аксиомами общей теории систем, которая рассматривается как типовой слой теоретической организации знаний в виде тетраэдра аксиоматических связей понятий, движение которого в другие точки инвариантного многообразия должно порождать новые системные теории и модели через интерпретацию понятий.

Как координатные векторы, законы (12) независимы, взаимно не выводимы. В касательном векторном пространстве выражению $S_i \equiv C_i$ соответствуют первые интегралы дифференциальных уравнений (10), тождеству $\Delta S_i \equiv D_i$ – соотношения вида (11). В разных теориях действие D_i обычно воспринимается как векторное или скалярное произведение векторов, а также в виде функционалов других типов. Изменения трактуются как производные по параметрам, например, по времени или расстоянию. Аксиоматический тетраэдр допускает другие сочетания понятий, кроме указанных в списке (12). В частности, тождество $\Delta S_i \equiv S_i$ моделирует автономный процесс саморазвития $f=\xi(f)$, тождество $\Delta^2 S_i \equiv \Delta S_i$ отражает переходный процесс $S_i \rightarrow S_j = S_i + \Delta S_i$. Различные комбинации понятий становятся возможны в силу произвольности выбора функций f в уравнениях (9) и (11) для анализа свойств векторных полей на многообразиях связи разных переменных $x=\{x_k\}$.

Действие $D_i=D(S_i)$ в законах относятся к правой части соотношений, отражающей причину существования явлений или процессов изменения, например, $\Delta S_i \equiv D(S_i)$ или $C_i \equiv D(S_i)$; последнее выражает закон сохранения действия. В конкретных уравнениях от выбора вида изменений зависят особенности поведения системы. Особый случай – постулирование постоянства вектора действия $D=\xi$ для развивающихся систем, поиск соответствующих векторных полей, определяющих интегральные линии решений.

Простое понимание вектора как стрелки, связывающей некоторые начальные и конечные позиции, позволяет обобщить представление о векторе, векторном пространстве и поле с соответствующими координатными базисами в виде дифференциалов и частных производных или законов связи понятий. Это дает возможность ввести в ММ новые аналитические методы исследований, например, представить элементы структуры графов и формальных категорий в соответствующем расслоенном метрическом или ином удобном для ММ пространстве.

В математико-технологических методах построения моделей есть много общего знания МТ-уровня, непосредственно следующего из математических формулировок связи понятий и переменных с ограничениями, определяющими особенности существования инвариантных многообразий разного вида и векторных пространств их касательных векторных расслоений качественного и количественного содержания, что полезно использовать для решения задач ММ по единой исследовательской схеме.

2. Примеры системного моделирования. При системном моделировании МТ-положения интерпретируются в терминах систем разного рода. Аксиоматически принимается существование специального многообразия M как локально линейного пространства связи параметров $x \in X$ систем и двойственного ему касательного векторного пространства TM удвоенной размерности с касательными слоями T_pM. Пространство X может быть не только трехмерным физическим, но и пространством различных природных и социально-экономических измеримых показателей, в котором при моделировании многообразие воспринимается как сплошная неоднородная среда, в частности, среда географическая. Такое многообразие является поверхностью-средой, инвариантной относительно TM, так что структуры и функции каждого слоя T_pM становятся средообусловленными. Учет средового смещения $x \to y$ дает эквивалентные соотношения $\xi[f(y)]$ – одинаковые в каждом слое.

Считается [1], что касательное пространство ξ в точке p – это линейное приближение гладкого многообразия M в окрестности U_p этой точки. На самом деле каждый касательный слой T_pM имеет самостоятельное значение и неограниченное (сквозное) распространение в X и только в слоении соответствует ограниченному слою $L_p \subset M$ с точным описанием локальной ситуации моделью векторного поля $\xi \subset T_pM$ в слое $L_p \subset M$ различного типа и местоположения с разными константными характеристиками (инвариантами) существования (см. рис. 2). В итоге многообразие трактуется в различных смыслах как континуум среды (скалярное поле), слоение L, касательное расслоение TM, векторное поле ξ, пучки линейных связей, система дифференциальных уравнений $z=\xi(f)$, системы локальных координат, сопровождающих трехграников и тетраэдров и как множество других формальных представлений наблюдаемых процессов и явлений, которые могут быть выражены в соответствующих моделях представления знаний.

Например, в географической проблематике, слоениями являются ландшафтно-типологическая структура территории, уровни территориальной иерархии, природные и экономические районы, суверенные государства, отрасли народного хозяйства, независимые органы власти и т.д. Векторное поле в соответствующих слоях расслоения задаются причинно-следственными связями слоев и векторами интересов. Здесь возникает сочетание количественного и качественного подходов, необходимых для ММ и позволяющих перевести графические схемы в дифференциальные уравнения. Возникает проблема содержательной интерпретации МТ-представлений в терминах разных наук, поскольку аналогичные суждения прослеживаются в различных областях знаний.

Одним из простейших решений дифференциального уравнения (9) является линейная функция (α_k – константы, компоненты ξ_k векторов):

$$f(y, x_p) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k .$$

В частности, она выражает балансовое соотношение массы или стоимости (y_k) с положительными (α_k=1) или отрицательными (α_k=-1) составляющими баланса. Если в качестве y_k рассматривать объем товарной массы, поступившей на рынок, коэффициент α_k считается ценой товара k-го вида, а функция $f(y, x_p)$ - совокупной стоимостью товара, связанной с рыночной ситуацией в регионе p со средовыми характеристиками рынка x_p, соответствующими, например, нереализованной массе товаров на складах или объему экспорта по разным сортиментам.

Для выявления средовой характеристики $x_p = \{x_{pk}\}$ используется связь коэффициентов (8) на основе данных из различных источников, однородных по показателям географической среды. Аллометрические уравнения, отражающие парные причинно-следственные связи в живых организмах, получаются из выражения (9) при задании переменных в логарифмическом масштабе (константа c_k):

$$F = F_p(x_k / x_{pk})^{c_k} = \Phi x_k^{c_k}, \ln F = c_k \ln x_k - c_k \ln x_{pk} + \ln F_p, \ln\Phi(c_k) = -c_k \ln x_{pk} + \ln F_p. \quad (13)$$

Зависимость высоты деревьев $F(x_k)$ от диаметра x_k описывается уравнением (13) с коэффициентами Φ, c_k и x_{pk}, определяемыми условиями среды. Коэффициенты меняются в зависимости от породы, типов условий среды, периодов развития, например, есть 6 вариантов уравнений вида $F = 0{,}580 x_k^{1{,}221}$ для сосны [22]. Коэффициенты этой связи действительно линейно связаны: $\ln\Phi = -2.63c_k + 2.63, r = -0{,}98.$ Отсюда величины средового смещения равны $\ln x_{pk} = 2{,}63, \ln F_p = 2{,}63,$ следовательно, $\ln F - 2{,}63 = c_k(\ln x_k - 2{,}63)$ - в логарифмической шкале эта зависимость представляет собой пучок линий с разным наклоном c_k. Эмпирически эту закономерность для аллометрических соотношений давно выявил Г. Лумер [39], и она естественно следует из автономного уравнения (9) при особом понимании элементов и связей.

Направленные процессы описываются потоковыми уравнениями (11), решение которых находится при определении их левой части, что позволяет конкретизировать зависимость искомой функции $f(t,y)$ от времени и факторов влияния $y = \{y_k\}$. Пусть $P^*(t,y)$ – вероятность неотказа системы выполнять свои функции, $E(t,y) = -\ln P^*(t,y)$ - величина интегрированной опасности $E(t,y) = -\ln P^*(t,y) = \int_0^t \rho(t,y)dt$, $\rho(t,y) = P(t,y)/P^*(t,y)$ - интенсивность отказов (риск). Отсюда $dP^*/dt = -\rho P^*$ и $dE/dt = \rho(t,y)$, следовательно,

$$\rho P^* = \xi(P^*) = \frac{\partial P^*}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial P^*}{\partial y_k}, \rho(t,y) = \xi(E) = \frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial E}{\partial y_k}.$$

В первом случае $\rho=\xi$, т.е. различие риска по факторам соответствует векторному полю скоростей изменения факторов. Для случая постоянного поля $p=const$ функция неотказа становится экспоненциальной функцией времени $P^*(t,y) = \exp(-pt)$, что характерно для физических систем. Во втором случае $\rho(t,y)$ является функцией времени и набора факторов риска. Постоянное векторное поле $\rho_0 = \xi$ в этом случае приводит к зависимости $E(t,y) = \exp(\rho_0 t)$, откуда $\rho(t,y) = \rho_0 \exp(\rho_0 t)$ и $P^*(t,y) = \exp\left[-\rho_0 \int_0^t \exp(\rho_0 t)dt\right] = \exp[-(\exp(\rho_0 t) - 1)]$. Здесь $P^*(t,y)$ имеет вид функции Гомпертца, распространенной в практике моделирования динамики популяций [5].

Этот анализ показывает, что правильный аксиоматический выбор постоянного вектора и соответствующего постоянного поля направлений решений уравнений определяет вид искомой зависимости. В последнем варианте при ρ=ξ=const появляется эволюционное уравнение

$$\rho_0 E(t,y) = \frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial E}{\partial y_k},$$

для решения которого находятся первые интегралы C, C_k, C_{kl}:

$$E = C\exp(\rho_0 t), E = C_k \exp\left(\rho_0 \frac{y_k}{v_k}\right), \frac{y_k}{v_k} = \frac{y_l}{v_l} + C_{kl}, y_k = x_k - x_{pk}.$$

Эти соотношения указывают на возможные типы зависимости $E(t,y)$ и производных функций надежности от времени и факторов, что позволяет создавать модели влияния факторов x_k и условий x_{0k} на величину риска в различных географических ситуациях [33].

Многовариантность задания функций в дифференциальных уравнениях в соответствие с разнообразием аксиоматических комбинаций понятий позволяет получить системные модели разного типа. Например, в (9) функцию $f(y,x_p)$ можно считать скоростью изменения координат положения объекта в пространстве признаков $v_l(y,x_p) = dy_l(y,x_p)/dt.$ В этом случае

$$\frac{d(x_l - x_{pl})}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{kl}(x_k - x_{pk}). \quad (18)$$

Такие уравнения используются при ММ эколого-экономических систем [8], где $x = \{x_k\}$ и $x_p = \{x_{pk}\}$ - агрегированные показатели текущего состояния природных ресурсов и их потенциальных равновесных значений; a_{kl} - коэффициенты самовосстановления и взаимовлияния природных ресурсов (в общем случае переменные величины, 0-однородные функции). Значения x_p зависят от разных аспектов природопользования, величины хозяйственных воздействий на природную среду. Равенство $x = x_p$ соответствует тривиальному решению уравнения (18), а именно естественному восстановительному ресурсному потенциалу, характеризующему особенности региональной географической среды. В формальном смысле состояние $x = x_p$ - это координаты точки касания многообразия природных ресурсов процессом природопользования в регионе.

Заключение. Уравнения системного моделирования явлений (9) и процессов (11) - автономных и неавтономных систем - напрямую связаны со своеобразными свойствами векторных полей касательных подпространств на многообразиях, которые в науке широко трактуются как среда, в том числе - географическая среда. Уравнения моделирования систем появляются в результате послойного погружения оценочных функций в векторные поля состояний и скоростей. Эти уравнения в касательном слое обладают универсальностью, т.е. не зависят от выбора глобальных (внешних) и локальных (внутренних) систем координат, соответствующих набору измеряемых показателей пространства исследования. На многообразии среды задаются векторные поля и касательные плоскости, порождающие расслоенное пространство этого многообразия, где каждый слой описывает изменение объекта, его структуры и функции в конкретной ситуации, определяемой точкой касания (местной средой). Коррелированное с расслоением слоение многообразия среды отражает топологическую и типологическую структуру пространства исследования как геоинформационного поля – источника знаний о своеобразии местных условий. Расслоенное познание и моделирование позволяет выделить универсальные средонезависимые уравнения и затем при расчетах учесть среду и ее динамику через смещение показателей.

Всякому пути на многообразии соответствует сопровождающий трехгранник или тетраэдр с локальными свойствами, однозначно определенными точкой касания. В расширенном смысле такой тетраэдр можно трактовать как формальную категорию, векторы-стрелки которой связывают базовые понятия интертеории моделирования в специальной предметной области. Независимые комбинации понятий порождают законы их связи в приложении к природным и социально-экономическим системам различного рода. Каждую функцию связи одинаково успешно можно описать как зависимость от параметра (расстояния, времени) и, что существенно, от показателей-факторов влияния, отразив причинно-следственные связи с учетом особенностей условий местоположения.

Прослеживается единство качественного и количественного подхода в ММ, выраженного соответственно в схемах (чертежах, графах, категориях) и аналитических формулах, в структурных и функциональных, топологических и геометрических построениях. Предлагается расширенная трактовка векторности, что позволяет создавать модели по универсальным правилам организации научного знания, облегчить процесс моделирования, определив виды допустимых уравнений и ограничения их применения.

Для исследования и моделирования процессов и явлений в природе и обществе пока используется малая часть тех информационных возможностей, что предаставляет современная математика. Прослеживается необходимость применения финслеровых пространств, теорий связности, конечных непрерывных групп, теории категорий и др. В основе методов ММ лежит аксиматическое утверждение, что наблюдаемый мир устроен как многообразие, частным выражением чего является неоднородная географическая среда, которую можно изучать, типизировать и картографировать в соответствие с принципами дифференциальной геометрии и топологии. Это утверждение необходимо эмпирически проверять и практически использовать в разных областях науки и прикладной деятельности, где проявляется принцип средовой относительности оценки явлений и прогнозирования развития процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.:Физматлит. 2005. 392с.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1971. 240 с.
3. Васильев А.М. Теория дифференциально-геометрических структур. М.: Изд-во МГУ. 1987. 190 с.
4. Волобуев И.П., Кубышкин Ю.А. Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их приложения в теории поля. М.: Эдиториал УРСС. 1998. 224 с.
5. Гаврилов Л.А., Гаврилова Н.С. Биология продолжительности жизни. М.:Наука. 1991. 385с.
6. Герловин И.Л. Основы единой теории всех взаимодействий в веществе. Л.: Энергоатомиздат. 1990. 432 с.
7. Готман А.Ш. Дифференциальная геометрия и ее использование в проектировании обводов судов. Новосибирск: Новосиб. гос. акад. водного транспорта. 2011. 43 с.

8. Гурман В.И. (ред.) Модели управления природными ресурсами. М.: Наука. 1981. 264 с.
9. Катанаев М.О. Геометрические методы в математической физике. М.: Математический институт имени В. А. Стеклова РАН, Казанский федеральный университет. 2016. 1570 с. Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/1311.0733.pdf (дата доступа 26.03.2019)
10. Картан Э. Ж. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера. М.: Изд-во МГУ. 1963. 368 с.
11. Ковеня В.М. Некоторые проблемы и тенденции развития математического моделирования // Прикладная механика и техническая физика. 2002. т.43. №3. с. 3-14.
12. Лебедев С.А. Метатеоретическое знание // Философия науки: Терминологический словарь. М.: Академический Проект. 2011. С. 87.
13. Меншуткин В.В. Искусство моделирования (экология, физиология, эволюция). Санкт-Петербург ; Петрозаводск: Карельский науч. центр РАН. 2010. 416 с.
14. Натанзон **С.** Краткий курс математического анализа. М.: Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО). 2018. 96 с.
15. Пенроуз Р. Путь к реальности или законы, управляющие Вселенной. Москва, Ижевск: R&C Dynamics, Институт компьютерных исследований. 2007. 911 с.
16. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. М.: Из-во МГУ. 1990. 384 с.
17. Савин Г. И. Системное моделирование сложных процессов. М.: Финансы и статистика. 2000. 276 с.
18. Самарский А. А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вестн. АН СССР. 1979. № 5. С. 38–49.
19. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи, методы, примеры. М.: Физматлит. 2001. 320 с.
20. Сарданашвили Г. А. Современные методы теории поля. 1. Геометрия и классические поля. М.: УРСС. 1996. 224 с.
21. Тамура И. Топология слоений. М: Мир. 1979. 317 с.
22. Терсков И.А., Терскова М.И. Рост одновозрастных древостоев. Новосибирск: Наука. 1980. 208 с.
23. Удалов В.С., Колобов О. А. Система «Центр – Периферия» в современном политическом процессе // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. №1 (2). С. 297–301.
24. Урманцев Ю.А. Общая теория систем: состояние, приложение и перспективы развития // Система. Симметрия. Гармония. М.: 1988. С. 38-130.
25. Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. М.: КомКнига. 2006. 264 с.
26. Черкашин А.К. Логические аспекты в решении теоретических проблем в географии // Методологические проблемы конкретных наук. Новосибирск: Наука. 1984. С.149-160.
27. Черкашин А. К. Полисистемный анализ и синтез. Новосибирск: Наука. 1997. 502 с.
28. Черкашин А. К. Полисистемное моделирование. Новосибирск: Наука. 2005. 280 с.
29. Черкашин А.К. Полисистемные исследования развития теоретической географии // География и природные ресурсы. №3. 2007. С. 27-37.
30. Черкашин А.К. Гомология и гомотопия в математике и математическом моделировании // Гомология и гомотопия географических систем. Новосибирск: Академическое издательство «Гео». 2009. С. 47–102.

31. Черкашин А.К. Модели и методы анализа территориальной организации общества // Региональные исследования. 2016. №1 (51). С. 23–36.
32. Черкашин А.К. Математические основания синтеза знаний междисциплинарных исследований социально-экономических явлений // Журнал экономической теории. №3. 2017. С. 108–124.
33. Черкашин А.К., Красноштанова Н.Е. Моделирование оценки риска хозяйственной деятельности в районах нового нефтегазового освоения // Проблемы анализа риска. 2015. № 6. С. 21–29.
34. Черкашин А.К., Мядзелец А.В. Характеризация развития региональной экономики с учетом макроэкономических факторов и условий // Экономика и математические методы. 2017. т.53. №4. С. 13–25.
35. Cherkashin A.K. Polysystem modelling of geographical processes and phenomena in nature and Society // Mathematical modelling of natural phenomena. 2009. V.4. № 5. Pp. 4–20.
36. Borgatti S.P., Everett M.G. Models of core/periphery structures // Social Networks. 1999. V.21. Pp. 375–395.
37. Dahl M. An brief introduction to Finsler geometry. 2006. Available at: https://math.aalto.fi/~fdahl/finsler/finsler.pdf (accessed 25.03.2019)
38. Lawson H.B. Foliations // Bull. Amer. Math. Soc., 1974. v.80. N 3. Pp. 369–418.
39. Lumer H. The dimentions and interrelationship of the Relative Growth Constants // The American Naturalist. V. 73. № 747. 1939. Pp. 339–346.
40. Richardson B.C., Joscelyn K.B., Saalberg J.H. Limitations on the use of mathematical models in transportation policy analysis // Transportation research, policy analysis studies. Report Number UM-HSRI-79-46. UMI Research Press. 1979. 15 p. Available at: https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/509/43459.0001.001.pdf?sequence=2&isAllowed=y (accessed 25.03.2019)
41. Strehler B.L., Mildvan A.S. General Theory of mortality and aging // Science. V.132. № 418. 1960. Pp. 14–21.

UDK 51.7:514.762:911.7

METATHEORETICAL SYSTEM MODELLING OF NATURAL AND SOCIAL PROCESSES AND PHENOMENA IN HETEROGENIOUS ENVIRONMENT

Alexander K. Cherkashin
Dr., Professor, Chief Researcher,
Head of the Laboratory "Theoretical geography"
V.B. Sochava Institute of Geography
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
664033, Russia, Irkutsk, st. Ulan-Batorskaya 1, e-mail: akcherk@irnok.net

Abstract. Metatheoretical (MT) bases of intertheoretical mathematical modeling of natural, economic and social systems are discussed. The main MT-statements are formulated in terms of differential geometry of tangent fibration and foliation on manifolds taking into account experience of creation of polysystem models in geographical science. The manifold is interpreted as the geographical environment of formation of the phenomena and processes. The equations for their modeling appear respectively as a result of mapping estimation functions upon vector fields of states and velocities of the fiber space. The tangent point of fiber contact is interpreted as environmental type of realization of the modelled regularities, and it's global coordinates correspond to conditions of environmental shift of system parameters. Taking into account these shifts the local system of coordinates is formed. The created MT-equations of connections and changes of relative parameters don't depend on the choice of global (external) and local (internal) coordinate systems. The foliation of the environment manifolds defines topological and typological structures of a research space as geoinformation source of knowledge on heterogeneity of local conditions. MT-modeling proposes the universal equations and allows taking into account an originality of systems and their environment through content-related interpretation of abstract concepts and environmental shift of variables. For MT-modeling the structures and functions connected with fibers are of importance, in particular, trihedrons and tetrahedrons of lines and surfaces. Their analogs are formal categories as the commutative diagrams of connections of concepts generating laws of creation of any system models.

Keywords: metatheoretical knowledge, intertheoretical modeling, polysystem models, environmental manifolds, environmental relativity, vector fields and functionals, equations of processes and phenomena.

References

1. Agrachev A.A., Sachkov YU.L. Geometricheskaya teoriya upravleniya [Geometrical theory of management]. Moscow. Fizmatlit. 2005. 392 p. (in Russian)
2. Arnol'd V.I. Obyknovennye differentsial'nye uravneniya [Ordinary differential equations]. Moscow. Nauka = Science. 1971. 240 p. (in Russian)
3. Vasil'ev A.M. Teoriya differentsial'no-geometricheskikh struktur [Theory of differentially-geometrical structures]. Moscow. Izd-vo MGU = Moscow State University publishing house. 1987. 190 p. (in Russian)
4. Volobuev I.P., Kubyshkin YU.A. Differentsial'naya geometriya i algebry Li i ikh prilozheniya v teorii polya [Differential geometry and algebra Li and their application in the theory of the field theory]. Moscow. Editorial URSS. 1998. 224 p. (in Russian)
5. Gavrilov L.A., Gavrilova N.S. Biologiya prodolzhitel'nosti zhizni [Biology of life-span]. Moscow. Nauka = Science. 1991. 385 p. (in Russian)
6. Gerlovin I.L. Osnovy edinoj teorii vsekh vzaimodejstvij v veshchestve [Bases of unique theory of all interactions in substance]. Leningrad. Energoatomizdat. 1990. 432 p. (in Russian)
7. Gotman A.SH. Differentsial'naya geometriya i ee ispol'zovanie v proektirovanii obvodov sudov [Differential geometry and its usage in designing ship outlines]. Novosibirsk. Novosibirskaya gosudarstvennaya akademiya vodnogo transporta = Novosibirsk State Academy of Water Transport. 2011. 43 p. (in Russian)
8. Gurman V.I. (red.) Modeli upravleniya prirodnymi resursami [Model of control on natural resources]. Moscow. Nauka = Science. 1981. 264 p (in Russian)

9. Katanaev M.O. Geometricheskie metody v matematicheskoj fizike [Geometrical methods in mathematical physics]. Moscow. Matematicheskij institut imeni V.A. Steklova RAN, Kazanskij federal'nyj universitet = Mathematical Institute named after V.A. Steklov RAS, Kazan Federal University. 2016. 1570 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/1311.0733.pdf (accessed 26.03.2019) (in Russian)
10. Cartan E.ZH. Teoriya konechnykh nepreryvnykh grupp i differentsial'naya geometriya, izlozhennaya metodom podvizhnogo repera [Theory of finite continuous groups and differential geometry expounded by the method of moving frame]. Moscow. Izd-vo MGU = Moscow State University publishing house. 1963. 368 p. (in Russian)
11. Kovenya V.M. Nekotorye problemy i tendentsii razvitiya matematicheskogo modelirovaniya [Some problems and progress in mathematical modelling // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Applied mechanics and technical physics. 2002. v.43. № 3. Pp. 3–14. (in Russian)
12. Lebedev S.A. Metateoreticheskoe znanie [Metatheoretical knowledge // Filosofiya nauki: Terminologicheskij slovar' // Science Philosophy: the terminological dictionary. Moscow. Akademicheskij Proekt = Academic Project. 2011. Pp. 87. (in Russian)
13. Menshutkin V.V. Iskusstvo modelirovaniya (ekologiya, fiziologiya, evolyutsiya) [Art of modelling (ecology, physiology, evolution)]. Sankt-Peterburg; Petrozavodsk: Karel'skiy nauch. tsentr RAN = St. Petersburg ; Petrozavodsk: Karelian scientific center of RAS. 2010. 416 p. (in Russian)
14. Natanzon S. Kratkij kurs matematicheskogo analiza [Short course on mathematical analysis]. Moscow. Izdatel'stvo Moskovskiy tsentr nepreryvnogo matematicheskogo obrazovaniya (MTSNMO) = Publishing House Moscow Center for Continuous Mathematical Education. 2018. 96 p. (in Russian)
15. Penrose R. The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe. London: Jonathan Cape. 2004. 1094 p. (Russ. Ed.: Penrose R. Put' k real'nosti ili zakony, upravlyayushchiye Vselennoy. Moscow. Nauchno-izdatel'skiy tsentr «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika» (NITS «RKHD») = Scientific and Publishing Center "Regular and Chaotic Dynamics" (SIC "RHD"). 2007. 911 p.
16. Poznyak E.G., SHikin E.V. Differentsial'naya geometriya: pervoe znakomstvo [Differential geometry: the limited theory]. Moscow. Izd-vo MGU = Moscow State University publishing house. 1990. 384 p. (in Russian)
17. Savin G.I. Sistemnoe modelirovanie slozhnykh protsessov [System modelling of complex processes]. Moscow. Finansy i statistika = Publisher "Finance and Statistics". 2000. 276 p. (in Russian)
18. Samarskij A.A. Matematicheskoe modelirovanie i vychislitel'nyj eksperiment [Mathematical modelling and computational experiment] // Vestnik AN SSSR = Bulletin of the USSR Academy of Sciences. 1979. № 5. Pp. 38–49. (in Russian)
19. Samarskij A.A., Mikhajlov A.P. Matematicheskoe modelirovanie. Idei, metody, primery [Mathematical modelling: ideas, methods, examples]. Moscow. Fizmatlit. 2001. 320 p. (in Russian)
20. Sardanashvili G.A. Sovremennye metody teorii polya. 1. Geometriya i klassicheskie polya [Modern methods on the field theory. 1. Geometry and classic fields]. Moscow. URSS. 1996. 224 p. (in Russian)

21. Tamura I. Topologiya sloenij [Topology of foliations]. Moscow. Mir. 1979. 317 p. (in Russian)
22. Terskov I.A., Terskova M.I. Rost odnovozrastnykh drevostoev [Growth of even-aged stands]. Novosibirsk. Nauka= Science. 1980. 208 p. (in Russian)
23. Udalov V.S., Kolobov O.A. Sistema «TSentr – Periferiya» v sovremennom politicheskom protsesse [The system "Center - Periphery" in a modern political process] // Vestnik Nizhegorodskogo un-ta im. N.I. Lobachevskogo = Bulletin of Nizhny Novgorod University N.I. Lobachevsky. 2011. № 1 (2). Pp. 297–301. (in Russian)
24. Urmantsev YU.A. Obshchaya teoriya sistem: sostoyanie, prilozhenie i perspektivy razvitiya [General systems theory: the state, application and prospects of development] // Sistema. Simmetriya. Garmoniya = System. Symmetry. Harmony. 1988. Pp. 38–130. (in Russian)
25. Finikov S.P. Proektivno-differentsial'naya geometriya [Projective-differential geometry]. Moscow. Izdatel'stvo «KomKniga» = Publishing House "ComBook". 2006. 264 p. (in Russian)
26. Cherkashin A.K. Logicheskie aspekty v reshenii teoreticheskikh problem v geografii // Metodologicheskie problemy konkretnykh nauk [Logical aspects in the decision of theoretical problems in geography // Methodological problems of concrete sciences.]. Novosibirsk. Nauka = Science. 1984. Pp.149–160. (in Russian)
27. Cherkashin A.K. Polisistemnyj analiz i sintez [Polysystem analysis and synthesis]. Novosibirsk. Nauka = Science. 1997. 502 p. (in Russian)
28. Cherkashin A.K. Polisistemnoe modelirovanie [Polysystem modelling]. Novosibirsk. Nauka = Science. 2005. 280 p. (in Russian)
29. Cherkashin A.K. Polisistemnye issledovaniya razvitiya teoreticheskoj geografii [Polysystem research of theoretical geography development] // Geografiya i prirodnye resursy = Geography and natural resources. № 3. 2007. Pp. 27–37. (in Russian)
30. Cherkashin A. K. Gomologiya i gomotopiya v matematike i matematicheskom modelirovanii [Homology and homotopy in mathematics and mathematical modeling] // Gomologiya i gomotopiya geograficheskikh system = Homology and homotopy of the geographical systems. Novosibirsk. Akademicheskoe izdatel'stvo «Geo» = Academic publishing house "Geo". 2009. Pp. 47–102. (in Russian)
31. Cherkashin A.K. Modeli i metody analiza territorial'noj organizatsii obshchestva [Models and methods of analysis of society territorial organization] // Regional'nye issledovaniya = Regional researches. 2016. № 1 (51). Pp. 23–36. (in Russian)
32. Cherkashin A.K. Matematicheskie osnovaniya sinteza znanij mezhdistsiplinarnykh issledovanij sotsial'no-ekonomicheskikh yavlenij [Mathematical bases of knowledge synthesis of interdisciplinary researches of the socio-economic phenomena] // ZHurnal ekonomicheskoj teorii = Journal of economic theory. № 3. 2017. Pp. 108–124. (in Russian)
33. CHerkashin A.K., Krasnoshtanova N.E. Modelirovanie otsenki riska khozyajstvennoj deyatel'nosti v rajonakh novogo neftegazovogo osvoeniya [Modelling of risk estimation on economic activity in the districts of the new oil and gas development] // Problemy analiza riska = Problems of risk analysis. 2015. № 6. Pp. 21–29. (in Russian)
34. CHerkashin A.K., Myadzelets A.V. KHarakterizatsiya razvitiya regional'noj ekonomiki s uchetom makroekonomicheskikh faktorov i uslovij [Characterizing regional economy development taking into account macroeconomic factors and conditions] // Ekonomika i

matematicheskie metody = Economy and mathematical methods. 2017. V.53. № 4. Pp. 13–25. (in Russian)

35. Cherkashin A.K. Polysystem modelling of geographical processes and phenomena in nature and Society // Mathematical modelling of natural phenomena. 2009. V.4. № 5. Pp. 4–20.
36. Borgatti S.P., Everett M.G. Models of core/periphery structures // Social Networks. 1999. V.21. Pp. 375–395.
37. Dahl M. An brief introduction to Finsler geometry. 2006. Available at: https://math.aalto.fi/~fdahl/finsler/finsler.pdf (accessed 25.03.2019)
38. Lawson H.B. Foliations // Bull. Amer. Math. Soc., 1974. V.80. N 3. Pp. 369–418.
39. Lumer H. The dimentions and interrelationship of the Relative Growth Constants // The American Naturalist. V. 73. № 747. 1939. Pp. 339–346.
40. Richardson B.C., Joscelyn K.B., Saalberg J.H. Limitations on the use of mathematical models in transportation policy analysis // Transportation research, policy analysis studies. Report Number UM-HSRI-79-46. UMI Research Press. 1979. 15 p. Available at: https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/509/43459.0001.001.pdf?sequence=2&isAllowed=y (accessed 25.03.2019)
41. Strehler B.L., Mildvan A.S. General Theory of mortality and aging // Science. V.132. № 418. 1960. Pp. 14–21.