

Математическое моделирование и его применение в научных исследованиях

УДК 517.95;535.3

DOI:10.25729/ESI.2026.43.3.005

Моделирование свойств критического значения показателя преломления при переходах пика интенсивности между нелинейной и градиентной оптическими средами

Савотченко Сергей Евгеньевич^{1,2}, Афанасьева Надежда Олеговна²

¹МИРЭА – Российский технологический университет,
Россия, Москва, savotchenkose@mail.ru

²Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе,
Россия, Москва

Аннотация. В работе проведено моделирование пространственного перераспределения интенсивности оптического поля в планарной волноводной структуре, образованной границей раздела между нелинейной средой и средой с градиентным показателем преломления. В качестве модели градиентной среды была выбрана обобщенная зависимость диэлектрической проницаемости от расстояния от поверхности контакта сред. В качестве модельной нелинейной среды была выбрана среда с оптическим эффектом Поккельса, в которой диэлектрическая проницаемость линейно зависит от амплитуды напряженности электрического поля. В исследовании выявлены критические режимы работы, в которых максимум интенсивности направляемой моды может быть целенаправленно расположен внутри любой из составляющих сред или точно на границе их раздела путем регулирования оптических параметров системы, определяющих критическое значение эффективного показателя преломления. Основным результатом работы является доказательство существования критического эффективного показателя преломления независимо от выбора модели нелинейности, при котором максимум поля точно локализован на границе раздела. Показано, что значение зависит исключительно от параметров, определяющих профиль градиентного показателя преломления, что обеспечивает дисперсионное соотношение. Особый акцент сделан на выявлении того, как каждый из параметров градиентного профиля в отдельности влияет на величину порога перехода. Анализ выявил, что критическое значение эффективного показателя преломления монотонно изменяется с изменением характерного пространственного масштаба и диэлектрических параметров градиентного слоя. Показано, что характер этого влияния определяется знаком и величиной соответствующих диэлектрических констант, что позволяет целенаправленно формировать необходимую зависимость критического показателя преломления от оптических параметров планарной волноводной структуры. В отличие от большинства работ, ограничивающихся численным моделированием конкретных конфигураций, данное исследование предлагает строгий аналитический подход, позволяющий получить явные критерии существования критического режима. Дополнительно обсуждается возможность использования полученных результатов для калибровки экспериментальных установок, настройки условий фазового синхронизма при генерации второй гармоники, а также для оценки допустимых разбросов параметров при производстве интегральных схем. Результаты создают теоретическую основу разработки методов контролируемой локализации света в гибридных волноводных структурах путем изменения их материальных и геометрических параметров или рабочей длины волны.

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейные уравнения, оптический волновод, нелинейная среда, краевая задача

Цитирование: Савотченко С.Е. Моделирование свойств критического значения показателя преломления при переходах пика интенсивности между нелинейной и градиентной оптическими средами / С.Е. Савотченко, Н.О. Афанасьева // Информационные и математические технологии в науке и управлении, 2026. – № 3(43). – С. 56-69. – DOI:10.25729/ESI.2026.43.3.005.

Введение. Проблемы управления пространственной локализацией оптического поля на границах раздела сред с принципиально различными физическими свойствами относятся к важным фундаментальным и прикладным задачам в области фотоники и волноводной оптики [1-3]. Эффективность нелинейных оптических процессов, таких, как генерация второй

гармоники [4], параметрическое усиление и самофокусировка, критически зависят от локализации максимума интенсивности поля относительно функциональных областей структуры [5]. Пространственное выравнивание областей высокой интенсивности с областями сильной нелинейной восприимчивости является необходимым условием для достижения высокой эффективности преобразования энергии [6]. Особую актуальность приобретает задача предсказуемого управления положением пика интенсивности без механического перемещения элементов или изменения состава нелинейного материала [7].

Несмотря на обширную литературу по нелинейной и волноводной оптике [8, 9], остается пробел в понимании условий, при которых гибридная волноводная структура из нелинейной и градиентной сред демонстрирует качественное изменение режима локализации света [10]. Отсутствует развитая систематическая теория, предсказывающая критическое значение параметра (эффективного показателя преломления), при котором происходит переход максимальной интенсивности от одного материала к другому. Предлагаемая работа восполняет этот пробел, выводя универсальное условие, определяемое оптическими характеристиками волноводной структуры.

Основная цель рассматриваемой работы заключается в моделировании и анализе критического значения эффективного показателя преломления, определяющего пространственный переход пика интенсивности между двумя различными оптическими средами (нелинейной средой и средой с градиентным показателем преломления) внутри планарной волноводной структуры. Новизна заключается в демонстрации того, что критическое условие локализации максимума поля на границе раздела определяется исключительно дисперсионными характеристиками градиентной среды, независимо от конкретного механизма нелинейного отклика в соседнем материале. Это отделяет критическое условие перехода от конкретной модели оптической нелинейности (что показано на примерах нелинейных сред с оптическими эффектами Поккельса и Керра [11]), предлагая более общую теоретическую основу по сравнению с анализом, сфокусированным на одном типе нелинейности. Эта универсальность представляет собой значительный концептуальный прогресс по сравнению с традиционными подходами к нелинейным волноводам, которые обычно связывают условия перехода непосредственно с нелинейными коэффициентами.

Применение методов математического моделирования также дает возможность получить явные аналитические выражения (где возможно) и четкие условия сопряжения, что позволяет глубже понять физику процесса, в отличие от чисто численных расчетов. Аналитические результаты и точные решения модельных уравнений служат эталоном для проверки более сложных численных моделей и коммерческих программ для моделирования (например, основанных на методе конечных элементов) [12, 13]. Кроме того, готовые аналитические решения позволяют проводить быстрый параметрический анализ и оптимизацию, что экономит вычислительные ресурсы, а их результаты создают теоретический базис для разработки нового поколения управляемых фотонных устройств, где пространственное положение световой энергии является управляющим параметром [14].

1. Основные уравнения модели и аналитические результаты. Будем рассматривать только поперечные электрические (ТЕ) волны, бегущие вдоль плоской границы раздела (вдоль оси Oz) двух сред с различными оптическими свойствами с компонентой напряженности электрического поля $E_y(x, z) = u(x) \exp(iknz)$, где k – волновое число, связанное с длиной волны в вакууме λ_0 : $k = 2\pi/\lambda_0$, n – эффективный показатель преломления, связанный с углом падения луча, возбуждающего волноводные моды или поверхностные волны. Как известно [15], в этом случае в рамках теории оптических волноводных систем получается скалярное уравнение

$$u''(x) + k^2(\varepsilon - n^2)u(x) = 0, \quad (1)$$

описывающее пространственное распределение электрического поля $u(x)$ в направлении, перпендикулярном границе раздела двух сред (расположенной в плоскости yOz) с различными оптическими свойствами (вдоль оси Ox). В (1) ε – диэлектрическая проницаемость, включающая свойства двух контактирующих сред. Поле затухает с ростом расстояния x от такой границы, причем на больших расстояниях убывание поля носит, как правило, экспоненциальный характер. Вдоль плоской границы раздела поле в виде бегущей (вдоль оси Oz) волны будет распространяться без затухания на большие расстояния в немагнитных средах с пренебрежительно малыми диэлектрическими потерями. Это означает, что поле локализуется вблизи такой границы раздела, поэтому она обладает волноводными свойствами, и может выступать в роли плоского волновода.

Поскольку наиболее перспективными с точки зрения управляемости дисперсионными характеристиками являются волноводные системы, сочетающие слои из кристаллов с нелинейным оптическим откликом, характеризуемым зависимостью диэлектрической проницаемости от амплитуды напряженности электрического поля (или интенсивности света) $\varepsilon = \varepsilon_N(u)$, и слои с неоднородным распределением показателя преломления, приводящего к зависимости диэлектрической проницаемости от расстояния $\varepsilon = \varepsilon_G(x)$ [16], то будем рассматривать волноводную систему, состоящую из разделенных плоской тонкой границей нелинейной среды при $x < 0$ и неоднородной (градиентной) среды при $x > 0$.

В ряде фотонно-кристаллических структур показатель преломления может меняться достаточно быстро с расстоянием от границы раздела [17, 18], поэтому при моделировании таких свойств резкой неоднородности можно использовать для модуляции пространственного профиля диэлектрической проницаемости функцию вида:

$$\varepsilon_G(x) = \varepsilon_{G0} + \frac{\varepsilon_{G1}}{x+h} + \frac{\varepsilon_{G2}}{(x+h)^2}, \quad (2)$$

где h , ε_{Gj} ($j=0, 1, 2$) – константы, называемые параметрами профиля. Так как функция (2) определена при $x > 0$, то для того, чтобы избежать сингулярности в модели, предполагается, что $h > 0$. Остальные параметры профиля ε_{Gj} могут иметь разные знаки, сочетание которых определяют его форму. Более подробный анализ соответствия значений параметров профиля (2) и его формы можно найти в [19], где показано, при каких знаках параметров функция (2) монотонная, имеет максимум или минимум.

Если считать, что искомое решение уравнения (1) $u(x) = u_G(x)$ при $x > 0$ и $u(x) = u_N(x)$ при $x < 0$ (здесь функции $u_G(x)$ и $u_N(x)$ описывают пространственные распределения напряженности поперечного электрического поля в неоднородной и нелинейной частях волновода, соответственно), и использовать представление диэлектрической проницаемости с учетом разделения на нелинейную и неоднородное полупространства и функцию (2), то получаются два уравнения

$$u_G'' + \left(\varepsilon_{G0} + \frac{\varepsilon_{G1}}{x+h} + \frac{\varepsilon_{G2}}{(x+h)^2} - n^2 \right) k^2 u_G = 0, \quad x > 0, \quad (3)$$

$$u_N'' + (\varepsilon_N(u) - n^2) k^2 u_N = 0, \quad x < 0. \quad (4)$$

Эти уравнения дополняются естественными требованиями непрерывности компонент поля на границе раздела сред, то есть решение u и его производные должны быть всюду непрерывными. Также решение u должно быть всюду ограниченным и исчезать на бесконечности. В результате получается краевая задача сопряжения для нахождения гладких, непрерывных и ограниченных решений u_G и u_N уравнений (3) и (4) на соответствующих полуосях, что составляет математическую формулировку модели рассматриваемой волноводной структуры.

Уравнение (3) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Его точное решение выражается через специальные функции. В частности, можно воспользоваться представлением решения через функцию Уиттекера $W_{\mu,\nu}(x)$ [19, 20]:

$$u_G(x) = u_0 \frac{W_{\mu,\nu}(2k\sqrt{n^2 - \varepsilon_{G0}}(x+h))}{W_{\mu,\nu}(2kh\sqrt{n^2 - \varepsilon_{G0}})}, x > 0. \quad (5)$$

где $u_0 = u_G(0)$ – амплитуда поля на границе раздела сред,

$$\mu = \frac{\varepsilon_{G1}}{2\sqrt{n^2 - \varepsilon_{G0}}}, \quad (6)$$

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4k^2\varepsilon_{G2}}. \quad (7)$$

Уравнение (4) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение зависит от выбора модели нелинейного отклика среды. В частности, в средах с эффектом Погкелса нелинейная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_N(u)$ записывается в виде линейной функции поля [21]:

$$\varepsilon_N(u) = \varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N1} \cdot u, \quad (8)$$

где ε_{N0} – невозмущенная диэлектрическая константа нелинейного кристалла, ε_{N1} – коэффициент нелинейности Погкельса. Тогда исчезающее на бесконечности решение нелинейного уравнения (4) с нелинейностью Погкельса (8) можно записать в виде:

$$u_N(x) = \frac{3(n^2 - \varepsilon_{N0})}{2\varepsilon_{N1}\text{ch}^2(k\sqrt{n^2 - \varepsilon_{N0}}(x+x_0)/2)}, x < 0. \quad (9)$$

В средах с эффектом Керра нелинейная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_N(u)$ записывается в виде квадратичной функции поля [21]:

$$\varepsilon_N(u) = \varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2} \cdot u^2, \quad (10)$$

где ε_{N2} – коэффициент нелинейности Керра. Тогда исчезающее на бесконечности решение нелинейного уравнения (4) с нелинейностью Керра (10) можно записать в виде:

$$u_N(x) = \sqrt{\frac{2(n^2 - \varepsilon_{N0})}{\varepsilon_{N2}}} \frac{1}{\text{ch}^2(k\sqrt{n^2 - \varepsilon_{N0}}(x+x_0))}, x < 0. \quad (11)$$

Оба решения (9) и (11) в обеих моделях нелинейностей определяются с точностью до сдвига на постоянную x_0 , которая определяется из условия непрерывности решения и его производной в точке $x=0$ при сшивке с решением на другой полуоси, заданным (5). Следовательно, можно считать, что решения нелинейного уравнения (4), порождаемые широким классом моделей нелинейностей [20], будут зависеть от аргумента со сдвижкой $x+x_0$. Поэтому будем далее использовать общее представление решения нелинейного уравнения (4) в виде:

$$u_N(x) = f(x+x_0). \quad (12)$$

где конкретный вид функции f определяется выбранной моделью нелинейности (считается далее известной). В частности, для модели нелинейности (8) решение задается функцией (9), а для модели нелинейности (10) решение задается функцией (11). Функция f ограниченная, непрерывная, дважды дифференцируемая и такая, что $|f(x)| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, а также, не теряя общности, можно считать далее, что $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0]$.

Параметр x_0 определяет положение максимума решения (12), то есть максимума интенсивности поля. Этот максимум находится в нелинейной среде, если $x_0 > 0$. При значениях $x_0 < 0$ он перемещается из нелинейной среды в неоднородную, причем при $x_0 = 0$ его положение

максимума оказывается в точности на границе раздела сред. Поэтому такое условие будет определять критические значения параметров системы, при которых максимум интенсивности поля переходит из одной среды в другую. Обычно варьируемым в экспериментах параметром является эффективный показатель преломления, поэтому можно говорить о существовании его критического значения n_c , определяемого оптическими параметрами системы.

Значение величины x_0 находится из условия непрерывности решений (5) и (12) и их производных в точке $x=0$:

$$u_0 = f(x_0), \quad (13)$$

$$q_G u_0 = f'(x_0), \quad (14)$$

где:

$$q_G = 2k\sqrt{n^2 - \varepsilon_{G0}} \frac{W'_{\mu,v}(2kh\sqrt{n^2 - \varepsilon_{G0}})}{W_{\mu,v}(2kh\sqrt{n^2 - \varepsilon_{G0}})}. \quad (15)$$

Из (13) и (14) получается уравнение:

$$q_G = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}. \quad (16)$$

Если ввести функцию $F=f'/f$, то (16) примет вид:

$$q_G = F(x_0). \quad (17)$$

Если считать, что функция F монотонная, взаимнооднозначная и существует обратная $F^{[-1]}$, то из (17) можно найти положение максимума в явном виде:

$$x_0 = F^{[-1]}(q_G). \quad (18)$$

Если максимум поля расположен в точности на границе раздела сред, то из (18) получается, что $F^{[-1]}(q_G)=0$. Если F нечётная и глобально обратимая на симметричной области (область определения и область значений функции симметричны относительно нуля), то $F^{[-1]}$ тоже будет нечётной. Следовательно, в этом случае получается, что из того, что $x_0=0$, вытекает, что $q_G=0$.

Последнее условие следует рассматривать, как уравнение для нахождения критического значения эффективного показателя преломления n_c , при котором максимум интенсивности располагается на границе раздела сред. Важно отметить, что это условие определяется выражением (15) и не зависит от модели нелинейности, а определяется характеристиками неоднородной среды. Такое поведение выявляет универсальную особенность гибридных волноводных систем, где геометрические и дисперсионные свойства градиентной среды определяют порог перехода для локализации поля.

Очевидно, что существует область значений эффективного показателя преломления $n > n_c$, при которой q_G и x_0 , соответственно, будут иметь определенные знаки, а при $n < n_c$ их знак поменяется на противоположный. Это означает, что максимум интенсивности поля будет располагаться в одной среде при $n > n_c$, и в другой при $n < n_c$. Конкретизация места его расположения определяется выбором модели волноводной системы, жестко связывающей q_G и x_0 , зависящих от n .

Существование такого критического значения n_c свидетельствует о детерминированном переходе в механизме локализации энергии внутри гибридного волновода. В точке $n=n_c$ конкурирующие механизмы ограничения из обеих сред уравниваются, в результате чего максимум поля «фиксируется» на физической границе раздела. Это аналогично фазовому переходу в пространственной области оптического поля.

Результаты аналитического моделирования выявляют фундаментальное расхождение между геометрическими волноводными свойствами градиентной среды и механизмом

нелинейного отклика при определении условия перехода для локализации поля. Физически это происходит потому, что критическое условие соответствует сингулярной точке, где логарифмическая производная поля (16) совпадает по обе стороны границы раздела сред. Условие, вытекающее из (16), математически эквивалентно требованию нулевой первой производной поля точно на границе.

В градиентной среде эта производная зависит исключительно от локального градиента показателя преломления и кривизны через решение уравнения в виде функции Уиттекера. В нелинейной среде, хотя форма профиля поля зависит от типа нелинейности, требование стационарной точки на границе накладывает универсальное ограничение, не зависящее от конкретного нелинейного коэффициента. Следовательно, порог перехода становится свойством только линейной градиентной структуры.

Это физически объясняет то, почему, как нелинейность типа Поккельса (линейная электрооптическая), так и нелинейность типа Керра (квадратичная, зависящая от интенсивности), приводят к одинаковым критическим условиям, несмотря на принципиально различную зависимость амплитуды поля. Данный результат имеет важное значение для проектирования реконфигурируемых фотонных устройств, где локализация поля должна контролироваться без изменения нелинейного состава материала.

2. Анализ влияния оптических параметров на критическое значение показателя преломления перехода. Для того, чтобы наглядно продемонстрировать эффект перехода интенсивности поля из одной среды в другую при варьировании оптических параметров системы, выберем конкретную модель нелинейности и получим в явном виде решение краевой задачи для уравнений (3) и (4), описывающее поперечное распределение поля в поверхностной волне.

В качестве примера выберем модель нелинейности (8). Тогда при использовании решения (9) можно получить явный вид уравнения (18):

$$x_0 = -\frac{2}{k\sqrt{n^2 - \varepsilon_{N0}}} \operatorname{arcth} \left(\frac{2q_G}{k\sqrt{n^2 - \varepsilon_{N0}}} \right). \quad (19)$$

Для этого случая из (13) с учетом (19) можно найти амплитуду поля на границе раздела сред:

$$u_0 = \frac{3(n^2 - \varepsilon_{N0} - 4q_G^2 / k^2)}{2\varepsilon_{N1}}. \quad (20)$$

Тогда можно записать решение краевой задачи для уравнений (3) и (4) с нелинейностью (8) в явном виде:

$$u(x) = \frac{3}{2\varepsilon_{N1}} \begin{cases} (n^2 - \varepsilon_{N0} - 4q_G^2 / k^2) \frac{W_{\mu,\nu}(2k\sqrt{n^2 - \varepsilon_{G0}}(x+h))}{W_{\mu,\nu}(2kh\sqrt{n^2 - \varepsilon_{G0}})}, & x > 0, \\ \frac{3(n^2 - \varepsilon_{N0})}{2\operatorname{ch}^2(k\sqrt{n^2 - \varepsilon_{N0}}(x+x_0)/2)}, & x < 0. \end{cases} \quad (21)$$

где x_0 определяется (19), а q_G – (15). Для вещественности данного решения должны выполняться условия $n^2 > \max\{\varepsilon_{N0}, \varepsilon_{G0}\}$, $\varepsilon_{G2} < 1/4k^2$ и $|q_G(\lambda)| < k\sqrt{n^2 - \varepsilon_{N0}}$.

Решение (21) описывает поперечное распределение поля в бегущей вдоль границы раздела сред поверхностной волне. Максимум интенсивности этого распределения может находиться в зависимости от значений параметров системы как в нелинейной среде, так и в неоднородной (Рис.1).

При выборе модели нелинейности (8) максимум интенсивности поля будет располагаться в неоднородной среде при $n < n_c$ (линия 1 на Рис.1), поскольку при таких значениях $x_0 < 0$, как следует из (19). Здесь профиль с градиентным показателем преломления действует как более эффективный оптический потенциал, ограничивая волну.

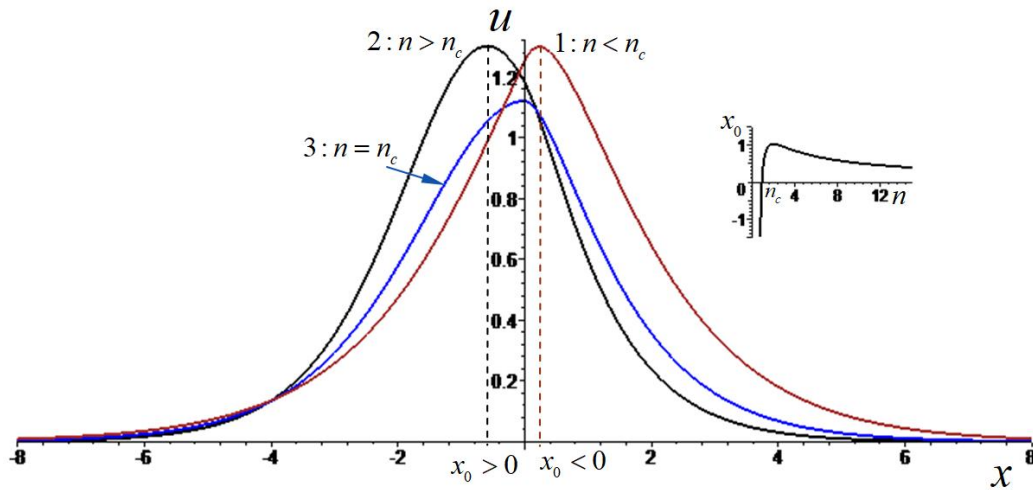


Рис. 1. Пространственные распределения интенсивности поля (21) при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах): $k=1, h=0.5, \varepsilon_{G0}=-0.1, \varepsilon_{G1}=1, \varepsilon_{G2}=0.4, \varepsilon_{N0}=0.1, \varepsilon_{N1}=0.4, n=0.75$ (1), $\varepsilon_{N1}=1.28, n=1.1$ (2), $\varepsilon_{N1}=1, n=0.92$ (3), а также зависимость x_0 от эффективного показателя преломления n (19) при $k=1, h=0.5, \varepsilon_{G0}=-0.1, \varepsilon_{G1}=1, \varepsilon_{G2}=0.2, \varepsilon_{N0}=0.1, \varepsilon_{N1}=1$.

При $n > n_c$ максимум интенсивности поля будет располагаться в нелинейной среде (линия 2 на Рис.1), так как при таких значениях будет $x_0 > 0$. В этом режиме доминирует нелинейный эффект самофокусировки (или линейное волноводное распространение в модели Поккельса), который обеспечивает более сильное ограничение для более высоких эффективных показателей преломления.

При $n = n_c$ будет $x_0 = 0$ и максимум интенсивности располагается на границе раздела сред, хотя и распределение поля при этом по обе стороны от нее не будет симметричным (линия 3 на Рис.1), но на больших расстояниях оно будет спадать экспоненциально по обе стороны от границы раздела сред. Из (19) видно, что $x_0 = 0$ будет при $q_G = 0$, как и ожидалось. Отсюда получается уравнение для нахождения критического значения эффективного показателя преломления n_c , при котором максимум интенсивности располагается на границе раздела сред:

$$W'_{\mu(n_c), \nu}(2kh\sqrt{n_c^2 - \varepsilon_{G0}}) = 0. \quad (22)$$

Здесь учтено, что нули производной функции Уиттекера не совпадают с нулями самой функции Уиттекера при одинаковых значениях параметров.

Если обозначить $s = 2kh\sqrt{n_c^2 - \varepsilon_{G0}}$ – корень уравнения:

$$W'_{(kh\varepsilon_{G1}/s), \nu}(s) = 0, \quad (23)$$

то из (23) вытекает критическое значение, определяющее критическое значение эффективного показателя преломления

$$n_c^2 = \varepsilon_{G0} + \left(\frac{s}{2kh}\right)^2. \quad (24)$$

Следует отметить, что уравнение (23) является сложным трансцендентным уравнением, поскольку искомая величина s входит как в аргумент, так и в индекс производной функции Уиттекера. Его решение можно найти только численно. Оно зависит только от параметров

градиентного профиля (2), моделирующего неоднородность оптических свойств среды: $s=s(kh, \varepsilon_{G0}, \varepsilon_{G1}, \varepsilon_{G2})$. Следовательно, от этих же параметров зависит критическое значение эффективного показателя преломления в соответствии с (24) $n_c=n_c(kh, \varepsilon_{G0}, \varepsilon_{G1}, \varepsilon_{G2})$. В этом случае (24) можно назвать законом дисперсии поверхностных волн, максимум интенсивности которых располагается в точности на границе раздела сред.

На рис. 2 представлены результаты анализа закона дисперсии (24) на основе решения уравнения (23). Критическое значение эффективного показателя преломления демонстрирует систематическую зависимость от геометрических и оптических параметров, определяющих профиль диэлектрической проницаемости градиентной среды. В частности, увеличение характерного расстояния профиля неоднородности h (он определяет пространственную скорость изменения показателя преломления в градиентной среде, а его большие значения подразумевают более медленное и плавное изменение показателя преломления) приводит к уменьшению критического значения n_c (рис. 2a).

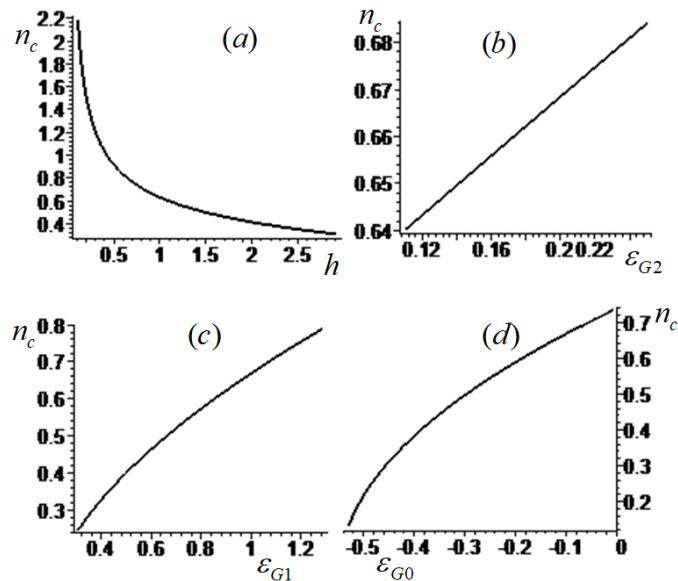


Рис. 2. Зависимости критического значения эффективного показателя преломления, рассчитанные из уравнения (24):

- a – от h при $\varepsilon_{G0}=-0.1, \varepsilon_{G1}=1, \varepsilon_{G2}=0.2, k=1$;
- b – от ε_{G2} при $\varepsilon_{G0}=-0.1, \varepsilon_{G1}=1, h=0.5, k=1$;
- c – от ε_{G1} при $\varepsilon_{G0}=-0.1, \varepsilon_{G2}=0.2, h=0.5, k=1$;
- d – от ε_{G0} при $\varepsilon_{G1}=1, \varepsilon_{G2}=0.2, h=0.5, k=1$.

Это обусловлено тем, что постепенный, более плавный, пространственный переход оптической плотности ослабляет волноводную силу вблизи границы раздела, что требует меньшего эффективного контраста показателя преломления для поддержания локализации поля на границе. Для поддержания пика интенсивности точно на границе раздела сред эффективный показатель преломления направляемой моды должен быть ниже, что уменьшает фазовое рассогласование и позволяет полю распространяться более симметрично относительно границы.

При увеличении остальных параметров профиля неоднородности (2) ε_{G2} (рис. 2b), ε_{G1} (рис. 2c) и $|\varepsilon_{G0}|$ (рис. 2d) наблюдается уменьшение критического значения эффективного показателя преломления. Характер всех зависимостей – монотонный. Этот набор параметров определяет базовое значение и форму (например, монотонную, с экстремумом) профиля диэлектрической проницаемости в градиентной среде. Монотонная зависимость n_c от параметров системы обеспечивает предсказуемую «кривую настройки».

Увеличение величины этих параметров, как правило, соответствует более сильному оптическому контрасту или более крутой эффективной потенциальной яме в градиентной среде. Это можно интерпретировать, как усиление волноводных свойств на градиентной стороне. Более крутые градиенты усиливают эффективный потенциал локализации в градиентной области, смещая положение равновесия максимума интенсивности, если это не компенсируется уменьшением эффективного показателя преломления. Для уравнивания сил, притягивающих максимум поля с обеих сторон и фиксирующих его на границе раздела, необходимо уменьшить волноводную силу эффективного показателя преломления (которая притягивает нелинейную сторону при более высоких значениях n), следовательно, требуется меньшее значение n_c .

Кроме того, смещение фоновой диэлектрической проницаемости ε_{G0} влияет на критическое условие за счет своего вклада в локальное волновое число в градиентной среде. Его более высокие значения увеличивают рассогласование фазовых скоростей на границе раздела, что требует корректировки эффективного показателя преломления для поддержания тонкого баланса, необходимого для локализации на границе раздела сред.

Следует отметить, что закон дисперсии, определяющий критическое значение эффективного показателя преломления, задается параметрами профиля (2), которые соответствуют модели градиентной среды, моделирующей ее неоднородность. Следовательно, регулирование их значений, а значит и критического значения эффективного показателя преломления, может осуществляться за счет формирования профиля неоднородности с такими характеристиками, значения которых будут попадать в нужную область для получения заданного распределения поля.

Однако такого управления профилем поля можно также добиться варьированием величины k , связанной с длиной волны в вакууме λ_0 лазерного излучения, возбуждающего поверхностную волну. Следовательно, в экспериментах в технических системах, составляющей частью которых будет являться рассматриваемая планарная волноводная структура, можно будет контролировать условия перехода максимума интенсивности поля из одной среды в другую путем подбора соответствующей длины волны рабочего лазера.

В рассматриваемой модели, как следует из анализа закона дисперсии (24), к уменьшению критического значения эффективного показателя приводит увеличение волнового числа k , и соответственно, уменьшение длины волны лазерного излучения. Следовательно, использование более короткой длины волны возбуждения облегчает переход пика интенсивности в градиентную среду при заданном фиксированном эффективном показателе преломления.

3. Возможное применение и практическое значение результатов моделирования.

Полученные результаты имеют непосредственное значение для прикладной фотоники и оптической инженерии. Предложенная теоретическая модель позволяет точно контролировать пространственное распределение интенсивности оптического поля в гибридных волноводных системах, что находит прямое применение в интегрированных фотонных схемах, требующих динамического перераспределения поля [22].

Одно из непосредственных применений заключается в разработке оптических переключателей, где переход максимума интенсивности через границу раздела материалов вызывает нелинейный отклик, например, усиление генерации второй гармоники, когда максимум поля пересекает нецентросимметричный кристалл, демонстрирующий нелинейность Поккельса [21]. Волноводная структура, работающая вблизи критической точки n_c , может функционировать, как сверхчувствительный оптический переключатель. Путем изменения параметров градиентного профиля для установки критического показателя

преломления на рабочей длине волны можно создавать селективные по длине волны переключающие элементы, где незначительная настройка длины волны вызывает резкое пространственное перемещение областей высокой интенсивности, тем самым модулируя эффективность нелинейного преобразования без механических компонентов. Такое перераспределение интенсивности может быть использовано для модуляции передачи сигнала между соседними выходными каналами с высоким контрастом в оптических модуляторах [23].

Кроме того, эти принципы применимы к проектированию поверхностных плазмон-поляритонов на границах раздела металл-диэлектрик с градиентными наложениями показателей преломления, где контроль глубины проникновения электромагнитных полей определяет чувствительность датчиков в безмаркерных биосенсорах. Это также может служить основой для разработки и усовершенствования датчиков. Высокая чувствительность положения пика к параметрам градиентного слоя (например, h , ε_{G1}) делает эту структуру перспективной для сенсорных приложений. Любой физический или химический процесс, изменяющий профиль показателя преломления (например, адсорбция молекул, изменения давления или температуры), будет сдвигать критическое значение перехода n_c . Мониторинг длины волны или угла ввода, необходимых для удержания пика на границе раздела, может обеспечить высокоточное измерение этих внешних изменений.

Возможность точного позиционирования максимумов интенсивности на функциональных границах раздела также полезна для фотонных кристаллических устройств и систем оптического захвата, где градиентные силы критически зависят от локализации поля [24]. Наиболее значимым является то, что зависимость критического состояния от длины волны позволяет осуществлять полностью оптическое управление распределением поля с использованием перестраиваемых лазерных источников, что дает возможность создавать реконфигурируемые фотонные схемы, в которых маршрутизация информации происходит за счет пространственного перераспределения оптической интенсивности, а не за счет традиционных механизмов направленной связи.

В фотонной инженерии возможность контролировать пространственное перекрытие максимума оптической интенсивности с нелинейным или линейным градиентным материалом позволяет оптимизировать конкретные взаимодействия. Например, для эффективного генерирования второй гармоники можно спроектировать систему таким образом, чтобы в рабочей точке пик был локализован внутри нелинейного кристалла Поккельса. И, наоборот, для приложений, основанных на линейных градиентных эффектах (например, для формирования определенных мод), пик может быть расположен внутри градиентного слоя.

Изложенные принципы предоставляют собой рекомендации по управлению перекрестными помехами и межслойной связью в многослойных фотонных интегральных схемах. Проектируя свойства интерфейса для установки определенного значения n_c , инженеры могут контролировать, будет ли оптическая мода преимущественно локализована в определенном слое или распределена на границе раздела, что имеет решающее значение для создания сложных многофункциональных чипов.

Заключение. В работе предложена математическая модель планарного волновода с границей раздела нелинейной и градиентной сред. Сформулирована и решена краевая задача, описывающая распространение поверхностных волн вдоль границы раздела между нелинейной и градиентной оптическими средами. Основным результатом работы является получение в явном виде трансцендентного уравнения, определяющего критический эффективный показатель преломления, при котором максимум интенсивности точно находится на границе. При переходе величины эффективного показателя преломления через

данное критическое значение происходит переход максимума интенсивности поля из одной среды в другую. Аналитически доказано, что это критическое значение не зависит от модели нелинейного отклика.

На примере нелинейности Поккельса было получено явное решение для распределения поля, которое использовалось для моделирования поведения критического эффективного показателя преломления в зависимости от варьирования оптических параметров системы. На основе проведенного анализа было установлено, что зависимости этого критического значения от всех параметров, характеризующих профиль градиентного показателя преломления, носят монотонный (возрастающий/убывающий) характер.

Было обсуждено возможное применение и практическое значение результатов моделирования. Практическая значимость подтверждается возможностью переноса полученных аналитических соотношений в инженерные методики расчета. В частности, установленные закономерности позволяют оценивать, какое изменение длины волны или толщины градиентного слоя вызовет смещение максимума поля из нелинейной области в градиентную. Таким образом, предложенная модель формирует не только теоретическую основу для понимания физики процесса, но и инструментарий для практической реализации управляемых волноводных структур с заданными свойствами.

Список источников

1. Meng Y., Chen Y., Lu L. et al. Optical meta-waveguides for integrated photonics and beyond. *Light: Science & Applications*, 2021, vol. 10, p. 235, DOI: 10.1038/s41377-021-00655-x.
2. Wang Y., Zhong L., Lau K.Y. et al. Precise mode control of laser-written waveguides for broadband, low-dispersion 3D integrated optics. *Light: Science & Applications*, 2024, vol. 13, p. 130, DOI: 10.1038/s41377-024-01473-7.
3. Muis D., Li Y., Barczyk R. et al. Broadband localization of light at the termination of a topological photonic waveguide. *Science Advances*, 2025, vol. 11, no. 16, p. eadr9569, DOI: 10.1126/sciadv.adr9569.
4. Caselli N., Riboli F., Intonti F. et al. Spatial steadiness of individual disorder modes upon controlled spectral tuning. *APL Photonics*, 2016, vol. 1, no. 4, p. 041301, DOI: 10.1063/1.4946852.
5. Krupa K., Fona R., Tonello A. et al. Spatial beam self-cleaning in second-harmonic generation. *Scientific Reports*, 2020, vol. 10, p. 7204, DOI: 10.1038/s41598-020-64080-7.
6. Wang Z.Y., Wu X., Xiong X. et al. Toward ultimate-efficiency frequency conversion in nonlinear optical microresonators. *Science Advances*, 2025, vol. 11, no. 18, p. eadu7605, DOI: 10.1126/sciadv.adu7605.
7. Echarrri A.R., Cox J.D., Yu R. et al. Enhancement of nonlinear optical phenomena by localized resonances. *ACS Photonics*, 2018, vol. 5, no. 4, pp. 1521-1527, DOI: 10.1021/acsphotonics.7b01562.
8. Wang X., Yin C., Cao Z. *Progress in planar optical waveguides*. Berlin, Springer, 2016, 241 p., DOI: 10.1007/978-3-662-48984-0.
9. *Fundamentals of optical waveguides*. Cambridge, Elsevier Inc., Academic Press, 2022, DOI: 10.1016/C2017-0-02432-1.
10. Agrawal G.P. *Physics and engineering of graded-index media*. New York, Cambridge University Press, 2023, 348 p., DOI: 10.1017/9781009282086.
11. Беспрозванных В.Г. *Нелинейная оптика* / В.Г. Беспрозванных, В.П. Первачук. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2011. – 200 с.
12. *Введение в моделирование систем*. – СПб.: РГГМУ, 2023. – 182 с.
13. Хакимзянов Г.С. *Математическое моделирование. Ч. 1: Общие принципы математического моделирования* / Г.С. Хакимзянов, Л.Б. Чубаров, П.В. Воронина. – Новосибир.: Новосиб. гос. ун-т., 2010. – 148 с.
14. Kivshar Y. All-dielectric meta-optics and non-linear nanophotonics. *National Science Review*, 2018, vol. 5, no. 2, pp. 144-158, DOI: 10.1093/nsr/nwy017.
15. Chen C.-L. *Foundations for guided-wave optics*. New York, John Wiley & Sons, 2005, 462 p., DOI: 10.1002/0470042222
16. Савотченко С.Е. Модели волноводов, сочетающих градиентные и нелинейно-оптические слои / С.Е. Савотченко // *Russian Technological Journal*, 2023. – Т. 11, № 4. – С. 84-93. – DOI: 10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93.

17. Singh B.K., Bijalwan A., Pandey P.C. et al. Photonic bandgaps engineering in double graded hyperbolic, exponential and linear index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Engineering Research Express*, 2019, vol. 1, no. 2, p. 025004, DOI: 10.1088/2631-8695/ab48a0.
18. Singh B.K., Bambole V., Rastogi V. et al. Multi-channel photonic bandgap engineering in hyperbolic graded index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Optics & Laser Technology*, 2020, vol. 129, p. 106293, DOI: 10.1016/j.optlastec.2020.106293.
19. Савотченко С.Е. Моделирование поверхностных волн в фотонных кристаллических структурах с профилем показателя преломления, убывающим с расстоянием от поверхности // *Russian Technological Journal*, 2026. – Т. 14, № 1. – С. 91-102. – DOI: 10.32362/2500-316X-2026-14-1-91-102.
20. Савотченко С.Е. Точное решение контактной краевой задачи для волноводной структуры из нелинейной и неоднородной оптических сред // *Письма в журнал технической физики*, 2026. – Т. 52, № 5. – С. 24-27. – DOI: 10.21883/PJTF.2026.05.59631.20008.
21. Boyd R.W. *Nonlinear optics*. 4th ed. London, Academic Press, 2020, 609 p.
22. Башкатов А.С. Состояние и потенциал развития фотонных интегральных схем на фосфиде индия, ниобате лития и кремнии / А.С. Башкатов, С.В. Корнилов, О.Н. Морозова и др. // *Радиоэлектронная отрасль: проблемы и их решения*, 2023. – № 11. – С. 2-10.
23. Li Y., Sun M., Miao T. et al. Towards high-performance Pockels effect-based modulators: review and projections. *Micromachines*, 2024, vol. 15, no. 7, p. 865, DOI: 10.3390/mi15070865.
24. Крайский А.А. О резонансном увеличении поля внутри фотонного кристалла в окнах прозрачности вблизи запрещенной зоны и некоторых его применениях / А.А. Крайский, А.В. Крайский, М.А. Казарян и др. // *Фотоника*, 2018. – Т. 12, № 8(76). – С. 802-822. – DOI: 10.22184/1993-7296.2018.12.8.802.822.

Савотченко Сергей Евгеньевич. Доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики-3 ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (РТУ МИРЭА), профессор кафедры высшей математики и физики ФГБОУ ВО «Российский государственный геологический университет им. Серго Орджоникидзе» (МГРИ). AuthorID: 137272, SPIN: 2552-4344, ScopusID: 6603577988, ORCID: 0000-0002-7158-9145, Researcher ID: N-9227-2018, savotchenkose@mail.ru. 119454, Россия, Москва, пр. Вернадского, 78

Афанасьева Надежда Олеговна. Аспирант кафедры высшей математики и физики ФГБОУ ВО «Российский государственный геологический университет им. Серго Орджоникидзе» (МГРИ). AuthorID: 1278367, SPIN: 5458-9250, ORCID: 0009-0009-0044-7930, noafanasieva@mail.ru. 117997, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 23.

UDC 517.95;535.3

DOI:10.25729/ESI.2026.43.3.005

Modeling the properties of the critical refractive index during peak intensity transitions between nonlinear and gradient optical media

Sergey E. Savotchenko^{1,2}, Nadezhda O. Afanasyeva²

¹MIREA – Russian technological university, Russia, Moscow, savotchenkose@mail.ru

²Sergo Ordzhonikidze Russian state university for geological prospecting, Russia, Moscow

Abstract. This paper presents a simulation of the spatial redistribution of optical field intensity in a planar waveguide structure formed by the interface between a nonlinear medium and a medium with a graded refractive index. A generalized dependence of permittivity on the distance from the contact surface of the media was chosen as a model for the gradient medium. A medium with a linear optical effect (Pockels effect), in which permittivity is linearly dependent on the amplitude of the electric field, was chosen as a model for the nonlinear medium. The study identifies critical operating modes in which the maximum intensity of the guided mode can be deliberately located within any of the constituent media or precisely at their interface by adjusting the optical parameters of the system that determine the critical value of the effective refractive index. The main result of the study is proof of the existence of a critical effective refractive index regardless of the choice of nonlinearity model, at which the

field maximum is precisely localized at the interface. It is shown that the value depends solely on the parameters determining the profile of the graded refractive index, which ensures the dispersion relation. Particular emphasis is placed on identifying how each of the gradient profile parameters individually affects the magnitude of the transition threshold. Aanalysis revealed that the critical value of the effective refractive index varies monotonically with changes in the characteristic spatial scale and dielectric parameters of the graded layer. It is shown that the nature of this influence is determined by the sign and magnitude of the corresponding dielectric constants, allowing for the targeted formation of the desired dependence of the critical refractive index on the optical parameters of a planar waveguide structure. Unlike most studies, which are limited to numerical modeling of specific configurations, this study proposes a rigorous analytical approach that allows for the derivation of explicit criteria for the existence of a critical regime. The potential use of the obtained results for calibrating experimental setups, adjusting phase-matching conditions for second-harmonic generation, and estimating acceptable parameter tolerances in integrated circuit manufacturing is also discussed. The results provide a theoretical basis for the development of methods for controlled light localization in hybrid waveguide structures by varying their material and geometric parameters or the operating wavelength.

Keywords: mathematical modeling, nonlinear equations, optical waveguide, nonlinear medium, boundary value problem

References

1. Meng Y., Chen Y., Lu L. et al. Optical meta-waveguides for integrated photonics and beyond. *Light: Science & Applications*, 2021, vol. 10, p. 235, DOI: 10.1038/s41377-021-00655-x.
2. Wang Y., Zhong L., Lau K.Y. et al. Precise mode control of laser-written waveguides for broadband, low-dispersion 3D integrated optics. *Light: Science & Applications*, 2024, vol. 13, p. 130, DOI: 10.1038/s41377-024-01473-7.
3. Muis D., Li Y., Barczy R. et al. Broadband localization of light at the termination of a topological photonic waveguide. *Science Advances*, 2025, vol. 11, no. 16, p. eadr9569, DOI: 10.1126/sciadv.adr9569.
4. Caselli N., Riboli F., Intonti F. et al. Spatial steadiness of individual disorder modes upon controlled spectral tuning. *APL Photonics*, 2016, vol. 1, no. 4, p. 041301, DOI: 10.1063/1.4946852.
5. Krupa K., Fona R., Tonello A. et al. Spatial beam self-cleaning in second-harmonic generation. *Scientific Reports*, 2020, vol. 10, p. 7204, DOI: 10.1038/s41598-020-64080-7.
6. Wang Z.Y., Wu X., Xiong X. et al. Toward ultimate-efficiency frequency conversion in nonlinear optical microresonators. *Science Advances*, 2025, vol. 11, no. 18, p. eadu7605, DOI: 10.1126/sciadv.adu7605.
7. Echarrri A.R., Cox J.D., Yu R. et al. Enhancement of nonlinear optical phenomena by localized resonances. *ACS Photonics*, 2018, vol. 5, no. 4, pp. 1521-1527, DOI: 10.1021/acsphotonics.7b01562.
8. Wang X., Yin C., Cao Z. *Progress in planar optical waveguides*. Berlin, Springer, 2016, 241 p., DOI: 10.1007/978-3-662-48984-0.
9. *Fundamentals of optical waveguides*. Cambridge, Elsevier Inc., Academic Press, 2022, DOI: 10.1016/C2017-0-02432-1.
10. Agrawal G.P. *Physics and engineering of graded-index media*. New York, Cambridge University Press, 2023, 348 p., DOI: 10.1017/9781009282086.
11. Besprozvannykh V.G., Pervadchuk V.P. *Nelinejnaya optika [Nonlinear Optics]*. Perm, Publishing House of Perm State Technical University, 2011. 200 p.
12. *Vvedenie v modelirovanie sistem [Introduction to System Modeling]*. SPb.: RSUHMU, 2023. 182.
13. Khakimzyanov G. S., Chubarov L. B., Voronina P. V. *Matematicheskoe modelirovanie. CH. 1: Obshchie principy matematicheskogo modelirovaniya [Mathematical Modeling Part 1: General Principles of Mathematical Modeling]*. Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2010, 148.
14. Kivshar Y. All-dielectric meta-optics and non-linear nanophotonics. *National Science Review*, 2018, vol. 5, no. 2, pp. 144-158, DOI: 10.1093/nsr/nwy017.
15. Chen C.-L. *Foundations for guided-wave optics*. New York, John Wiley & Sons, 2005, 462 p., DOI: 10.1002/0470042222
16. Savotchenko S.E. Modeli volnovodov, sochetayushchikh gradientnyye i nelineyno-opticheskiye sloi [Models of waveguides combining gradient and nonlinear optical layers]. *Russian Technological Journal*, 2023, vol. 11, no. 4, pp. 84-93, DOI: 10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93.
17. Singh B.K., Bijalwan A., Pandey P.C. et al. Photonic bandgaps engineering in double graded hyperbolic, exponential and linear index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Engineering Research Express*, 2019, vol. 1, no. 2, p. 025004, DOI: 10.1088/2631-8695/ab48a0.

18. Singh B.K., Bambole V., Rastogi V. et al. Multi-channel photonic bandgap engineering in hyperbolic graded index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Optics & Laser Technology*, 2020, vol. 129, p. 106293, DOI: 10.1016/j.optlastec.2020.106293.
19. Savotchenko S.E. Modelirovaniye poverkhnostnykh voln v fotonnykh kristallicheskikh strukturakh s profilem pokazatelya prelomleniya, ubyayushchim s rasstoyaniyem ot poverkhnosti [Modeling of surface waves in photonic crystal structures with a refractive index profile decreasing with distance from the surface]. *Russian Technological Journal*, 2026, vol. 14, no. 1, pp. 91-102, DOI: 10.32362/2500-316X-2026-14-1-91-102.
20. Savotchenko S.E. Tochnoye resheniye kontaktnoy krayevoy zadachi dlya volnovodnoy struktury iz nelineynoy i neodnorodnoy opticheskikh sred [Exact solution of the contact boundary value problem for a waveguide structure made of nonlinear and inhomogeneous optical media]. *Technical Physics Letters*, 2026, vol. 52, no. 5, pp. 24-27, DOI: 10.21883/PJTF.2026.05.59631.20008.
21. Boyd R.W. *Nonlinear optics*. 4th ed. London, Academic Press, 2020, 609 p.
22. Bashkatov A.S., Kornilov S.V., Morozova O.N. et al. Sostoyaniye i potentsial razvitiya fotonnykh integral'nykh skhem na fosfide indiya, niobate litiya i kremnii [State and development potential of photonic integrated circuits on indium phosphide, lithium niobate and silicon]. *Radioelektronnaya otrasl': problemy i ikh resheniya* [Radioelectronic Industry: Problems and Solutions], 2023, no. 11, pp. 2-10.
23. Li Y., Sun M., Miao T. et al. Towards high-performance Pockels effect-based modulators: review and projections. *Micromachines*, 2024, vol. 15, no. 7, p. 865, DOI: 10.3390/mi15070865.
24. Kraiskii A.A., Kraiskii A.V., Kazaryan M.A. et al. O rezonansnom uvelichenii polya vnutri fotonnogo kristalla v oknakh prozrachnosti vblizi zapreshchennoy zony i nekotorykh yego primeneniyyakh [On resonant field enhancement inside a photonic crystal in transparency windows near the band gap and some of its applications]. *Fotonika* [Photonics], 2018, vol. 12, no. 8(76), pp. 802-822, DOI: 10.22184/1993-7296.2018.12.8.802.822.

Savotchenko Sergey Evgenievich, D.Sc. (Phys. and Mathematics), Associate Professor, Professor, Department of Higher Mathematics-3, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "MIREA – Russian Technological University" (RTU – MIREA), Professor The Department of Higher Mathematics and Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Sergo Ordzhonikidze Russian State University for Geological Prospecting" (MGRI). AuthorID: 137272, SPIN: 2552-4344, ScopusID: 6603577988, ORCID: 0000-0002-7158-9145, Researcher ID: N-9227-2018, savotchenkose@mail.ru. 119454, Russia, Moscow, Vernadsky Ave. 78.

Afanasyeva Nadezhda Olegovna, Postgraduate student, The Department of Higher Mathematics and Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Sergo Ordzhonikidze Russian State University for Geological Prospecting" (MGRI). AuthorID: 1278367, SPIN: 5458-9250, ORCID: 0009-0009-0044-7930, noafanasieva@mail.ru. 117997, Russia, Moscow, Miklukho-Maklaya str., 23.

Статья поступила в редакцию 03.03.2026; одобрена после рецензирования 22.07.2026; принята к публикации 15.08.2026.

The article was submitted 03/03/2026; approved after reviewing 07/22/2026; accepted for publication 08/15/2026.