

## Программные системы и комплексы

УДК 517.977.58

DOI:10.25729/ESI.2026.42.2.014

### Специализированные алгоритмы и программные средства оптимизации нелинейных управляемых динамических систем

Зароднюк Татьяна Сергеевна

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН,  
Россия, Иркутск, *tz@icc.ru*

**Аннотация.** Разработанные алгоритмы решения нелинейных задач оптимального управления и аппроксимации невыпуклых множеств достижимости легли в основу реализованных специализированных программных средств, ориентированных на исследование нелинейных управляемых динамических систем. Подобные системы возникают в различных научно-технических и промышленных областях, характеризуются высокой степенью сложности (нелинейными динамическими системами и невыпуклыми целевыми функционалами), поэтому для их эффективного решения требуется использование алгоритмов, позволяющих учитывать специфику задач рассматриваемого класса. В работе предложены соответствующие вычислительные технологии, опирающиеся как на использование классических подходов, основанных на последовательной дискретизации непрерывных задач и применении принципа максимума Понтрягина, так и опирающиеся на использование специфических особенностей управляемых динамических систем – свойства линейной связности множества достижимости и свойства скрытой выпуклости множества допустимых скоростей управляемых динамических систем. Методики предоптимизационного анализа (оценки степени выпуклости целевых функционалов и построения границы множества достижимости) также реализованы в виде программ, позволяющих на старте оценить вычислительную сложность прикладных задач невыпуклой оптимизации и подобрать эффективные численные методы для ее решения.

Приводятся описания математической, программной и технологической постановок исследуемых невыпуклых задач оптимального управления. Представлена схема методологии синтеза многометодных нелокальных алгоритмов для оптимизации управляемых динамических систем. Описаны этапы формирования вычислительной схемы и особенности выбора значений алгоритмических параметров.

Для тестирования программных реализаций алгоритмов невыпуклой оптимизации с целью исследования их предельных свойств и поиска эффективных модификаций используется разработанная тестовая коллекция нелинейных задач оптимального управления. Коллекция включает как опубликованные задачи с известными решениями, так и сгенерированные с использованием предложенной методики генерации тестов. Разработанные алгоритмы и соответствующее программное обеспечение применялось при решении практических задач из различных научно-технических областей: динамики полета и космонавигации, квантовой физики и вычислительной химии, синтеза композитных конструкций, экономики, медицины, технической экологии и других областей.

**Ключевые слова:** алгоритмы невыпуклой оптимизации, задачи оптимального управления, нелинейные управляемые динамические системы

**Цитирование:** Зароднюк Т.С. Специализированные алгоритмы и программные средства оптимизации нелинейных управляемых динамических систем / Т.С. Зароднюк // Информационные и математические технологии в науке и управлении, 2026. – № 2(42). – С. 177-189. – DOI:10.25729/ESI.2026.42.2.014.

**Введение.** Область исследования прикладных управляемых динамических систем развивается очень активно, подобные задачи возникают в различных научно-технических областях: космонавигации и динамики полета, квантовой физики, технической экологии и медицины, синтеза композитных конструкций, экономике, географии, сейсмологии и многих других. Необходимо разрабатывать соответствующие вычислительные технологии решения подобных невыпуклых задач оптимального управления (ЗОУ). В работе предложено специализированное программное обеспечение, ориентированное на исследование практических задач траекторной оптимизации и представлены результаты его применения при решении задач из тестовой коллекции.

Реализованные программные средства невыпуклой оптимизации позволяют проводить численное исследование управляемых динамических систем, получать овыпукление множества допустимых скоростей и аппроксимировать множество достижимости (МД). Методики предоптимизационного анализа ориентированы на получение оценок степени выпуклости функционала и построение границы множества достижимости управляемых динамических систем. Арсенал реализованных средств невыпуклой оптимизации включает – моноволновой алгоритм построения границы множества достижимости [1] и алгоритм оценки степени выпуклости целевого функционала [2]; алгоритмы аппроксимации множества достижимости (криволинейного поиска, туннельного типа, и овыпукления множества скоростей и методы покрытий МД [3]), а также траекторной оптимизации (методы, основанные на принципе максимума Понтрягина и последовательной дискретизации [4]). Эффективность реализованных алгоритмов зависит от выбора значений алгоритмических параметров, который можно осуществить путем проведения многовариантного тестирования.

Для формирования программной постановки невыпуклой задачи оптимального управления для реализованных алгоритмов используется последовательность процедур, в которых на языке С описаны – целевой оптимизируемый функционал, система дифференциальных уравнений, ограничения на интервал ее функционирования, а также на управления и фазовые координаты. В результате численного решения получают наборы табличных данных – значения траекторий и управлений на временной сетке с заданным шагом дискретизации. Визуализация достигнутых результатов может быть выполнена разными способами, например, с использованием языка программирования Python (стандартная графическая библиотека Matplotlib) или графических редакторов Grapher и Surfer (Golden Software), позволяющих строить как двумерные графики полученных результатов, так и поверхности в трехмерном пространстве.

Традиционно выделяют несколько вариантов представления постановки задачи для программных реализаций алгоритмов невыпуклой оптимизации [5]: математическая, программная и технологическая постановки задачи.

*Математическая постановка* подразумевает полное представление используемой для описания динамического процесса математической модели, которое включает соответствующую систему дифференциальных уравнений; ограничения на фазовые координаты в начальный момент времени и на управления на всем интервале времени функционирования системы; а также минимизируемый функционал, позволяющий оценить качество управляющего воздействия с целью выбора наилучшего.

*Программная постановка задачи* – постановка, записанная с помощью команд выбранного языка программирования (в данном случае языка С), основанная на интерпретации математической постановки для реализованных алгоритмов невыпуклой оптимизации, и включающая технологическую постановку.

*Технологическая постановка задачи* – это описание конкретной задачи оптимального управления, включающее способ дискретизации исходной управляемой динамической системы, задание значений параметров алгоритмов, входящих в состав сформированной многометодной схемы, а также номер и название задачи, необходимые для дальнейшей обработки файлов с результатами полученных численно решений.

**1. Описание исследуемых управляемых динамических процессов.** Математические модели, позволяющие проводить исследования управляемых динамических процессов, могут быть описаны системами обыкновенных дифференциальных уравнении с заданными ограничениями:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$u \in U = \{u \in R^m: u_i \leq \bar{u}_i, i = \overline{1, m}\}, \quad (2)$$

$$I[x, u] = \phi(x(t_1)) \rightarrow \min. \quad (3)$$

Эта постановка является эталонной, при наличии ограничений, которые в ней не представлены, можно путем стандартных редукций привести более сложные задачи к эталонному виду (1)–(3). Например, критерий качества допустимых управляющих воздействий может быть представлен в виде функционала интегрального типа:

$$I[x, u] = \int_{t_0}^{t_1} g_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min.$$

Достаточно ввести дополнительную фазовую координату  $\dot{x}_{n+1}(t) = g_0(x(t), u(t), t)$ ,  $x_{n+1}(t_0) = x^0$  для представления целевого функционала в линейном терминальном виде:  $I[x, u] = x_{n+1}(t_1) \rightarrow \min$ . Задача аппроксимации множества достижимости заключается в нахождении (аппроксимации) множества конечных векторов  $x(t_1)$  всех траекторий, которые соответствуют всем возможным допустимым управлениям – управлениям, удовлетворяющим заданным геометрическим ограничениям (2).

**1.1. Программная постановка задачи** заключается в описании компонентов задачи оптимального управления на программном языке и включает, помимо математических формулировок, ряд технологических блоков. Здесь же задаются значения алгоритмических параметров, в случае отсутствия их явно заданных значений – выбираются те, которые предусмотрены по умолчанию. Программная постановка задачи для реализованных средств оптимизации управляемых динамических систем представляет собой описание задачи на языке программирования С. Пользователю при формировании описания конкретной задачи необходимо представить следующие компоненты:

- Процедура 01 позволяет зафиксировать размерности задачи – число фазовых переменных и управляющих воздействий (как функций, так и управлений–параметров), временной интервал с выбранным шагом дискретизации;
- Процедура 02 включает задание ограничений на управление и фазовый вектор в начальный момент времени;
- Процедура 03 позволяет описать нелинейную систему дифференциальных уравнений, представляющую исследуемый процесс.
- Процедура 04 включает задание вида целевого функционала, оценивающего качество управляющих воздействий.

Набор алгоритмических параметров зависит от используемых методов решения задачи и может существенно отличаться для разных вариантов вычислительных схем.

**1.2. Технологическая постановка задачи** основана на детальном описании всех компонентов математической постановки и требуемых для ее решения составляющих – как задаваемых пользователем, так и используемых из заранее установленных для организации автоматических вычислений:

1. Исходные размерности задачи (число фазовых переменных, число управлений–параметров, число управлений–функций, число постановочных параметров для метода штрафных функций, когда это необходимо).
2. Система дифференциальных уравнений с управлениями–функциями и управлениями–параметрами.
3. Интервал времени функционирования системы, характеризующий исследуемый управляемый динамический процесс.
4. Ограничения на фазовые координаты в момент времени  $t_0$ .
5. Геометрические ограничения на управления.
6. Параметризация модели и значения постановочных параметров.

7. Дискретизация исходной задачи на начальном этапе, стартовый метод интегрирования и максимальные размеры сетки дискретизации.
8. Начальные приближения к управляющим воздействиям.
9. Режимы вывода итоговых результатов – протоколов вычислительного процесса, табличных данных, характеризующих как наилучшие траектории системы и управления, так и позволяющих построить аппроксимацию множеств достижимости.

Приведем пример программной постановки задачи на языке С, включающей перечисленные выше компоненты для двумерной тестовой задачи (табл. 1):

**Таблица 1.** Программная постановка невыпуклой тестовой ЗОУ

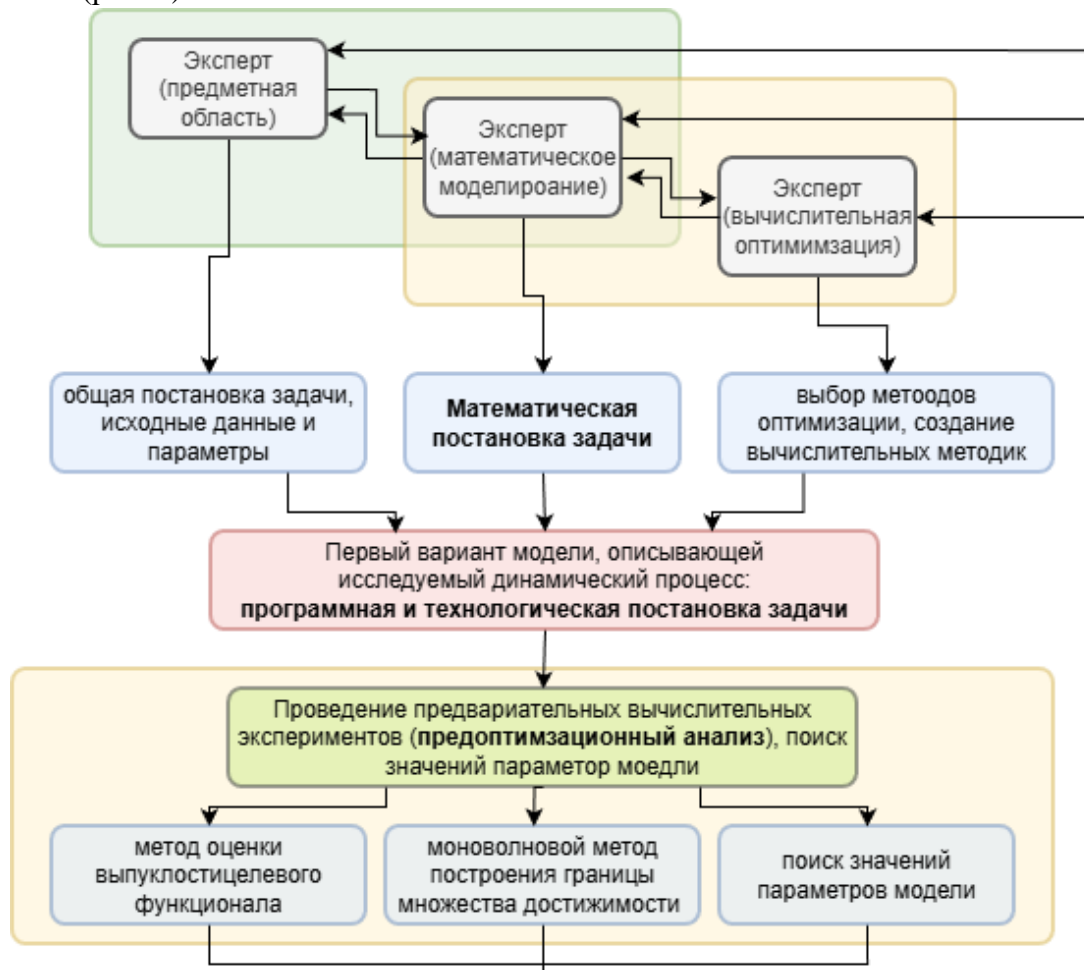
<code>// Test_001</code>	
<code>// Процедура 01 (выбор методов и значений алгоритмических параметров)</code>	
<code>void init_dimension(void) { // PARAMETERS   n = 2;   ru = 1;   rv = 0;   t0 = 0.0;   t1 = 7.0;   nu = 101;    met_glob = 3;   met_gener = 1;   u1_kp = 3;   met_integ = 2;   met_lok = 1;   eps_int = 1e-8;   delta_fi0 = 1e-6;   gs1_nstoxa = 30000;   iprint = 1; } // init_dimension</code>	<code>// число фазовых переменных; // количество управляющих функций; // число управляющих параметров; // начальный момент времени; // конечный момент времени; // количество узлов дискретизации интервала времени;  // метод нелокальной оптимизации; // алгоритм генерации управлений (функции рейного типа); // количество точек переключения // метод интегрирования; // метода локального поиска; // локальная точность интегрирования; // точность по функционалу; // число точек стохастической аппроксимации МД; // параметр, отвечающий за детализацию выдачи численных результатов в текстовые файлы;</code>
<code>// Процедура 02 (задание значений фазового вектора в начальный момент времени и ограничений на управляющие воздействия)</code>	
<code>void init_data(void) { // MODEL   x0[1] = 5.0;   x0[2] = 0.0;   u1[1] = -1.0;   ug[1] = 1.0; } // initial_data</code>	<code>// начальный фазовый вектор // границы области допустимых управлений (нижняя и верхняя)</code>
<code>// Процедура 03 (формулировка правых частей системы дифференциальных уравнений)</code>	
<code>void fp(double* x, double u, double t, double* dxdt) { // ODE SYSTEM   dxdt[1] = x[2];   dxdt[2] = u[1] - x[1] + x[1] * x[1] * x[1] / 6.0 -           x[1] * x[1] * x[1] * x[1] * x[1] / 120.0; } // fp</code>	
<code>// Процедура 04 (задание терминального целевого функционала)</code>	
<code>double fi(double* xt1) { // OBJ_FUNC   return (xt1[1] + 1.0) * (xt1[1] + 1.0) + (xt1[2] - 9.5) * (xt1[2] - 9.5); } // fi</code>	

## 2. Схема методологии синтеза многометодных нелокальных алгоритмов для ЗОУ.

Помимо требований к математической постановке исследуемой задачи (дифференцируемость входящих в постановку функций, учет ограничений на управление и фазовые координаты), для успешного применения разработанных алгоритмов необходимо организовать

продуктивный диалог между специалистом в предметной области – постановщиком задачи, и специалистом по разработке и использованию методов невыпуклой оптимизации. На верхнем уровне схемы присутствует также эксперт–постановщик математической модели, описывающей исследуемый динамический процесс. В некоторых случаях при решении прикладных задач таким экспертом может являться отдельный специалист, принимающий участие в совместных исследованиях или опубликовавший модель, которую можно использовать при изучении динамических процессов, но чаще эти функции берет на себя эксперт из предметной области или вычислитель, обладающий опытом решения множества практических задач из различных научно-технических областей.

**2.1. Этапы формирования вычислительной схемы исследования управляемых динамических систем.** Готовые математические модели используются в редких случаях, как правило, на старте формализации описания исследуемого процесса. У специалиста в предметной области есть накопленная база данных о вызывающих интерес экспертных факторах, которые необходимо проанализировать, использовать для формирования обобщающих выводов и прогнозов, или известные закономерности, хорошо изученные модели, которые не всегда позволяют детально описывать исследуемый процесс. Поэтому этап формирования математической модели для прикладной динамической задачи является творческим и многошаговым, где важную роль играет продуктивный диалог между экспертами (рис. 1).

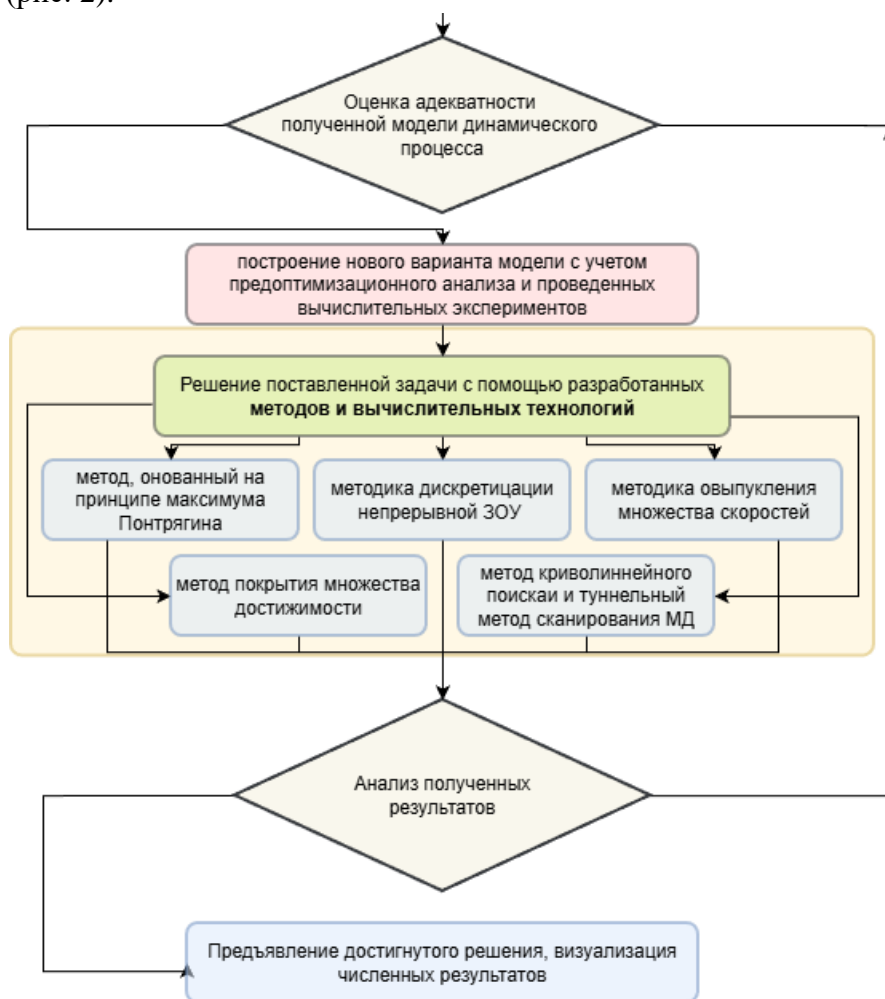


**Рис. 1.** Схема методологии синтеза разработанных алгоритмов невыпуклой оптимизации управляемых динамических систем (начало)

После формирования предварительного варианта модели реализуется ее предоптимизационный анализ:

1. Применение методики оценки степени выпуклости целевого функционала для определения уровня сложности соответствующей задачи траекторной оптимизации.
2. Использование моноволнового метода, позволяющего построить границу множества достижимости за счет формирования семейства управляющих воздействий релейного типа.
3. Поиск значений параметров модели подразумевает решение вспомогательных задач параметрической идентификации для нахождения наилучших значений из заданных интервалов.
4. Проведение вычислительных экспериментов по подбору штрафных коэффициентов при наличии в модели дополнительных фазовых и терминальных ограничений.

По результатам предоптимизационного анализа модели осуществляется оценка полученных результатов экспертами из предметной области и специалистами по методам невыпуклой оптимизации, как в направлении оценки степени адекватности представления исследуемого процесса, так и с точки зрения возникающих вычислительных сложностей с целью выбора наиболее эффективных методов и вычислительных технологий, позволяющих их преодолевать (рис. 2).



**Рис. 2.** Схема методологии синтеза разработанных алгоритмов невыпуклой оптимизации управляемых динамических систем (продолжение)

По результатам анализа осуществляется корректировка модели при необходимости и формирование рекомендованных для ее эффективного исследования *методов невыпуклой оптимизации управляемых динамических систем*.

1. Методы сканирования множества достижимости (семейство методов криволинейного поиска) путем построения вариаций управления с целью поиска минимума целевого функционала вдоль соответствующих кривых, покрывающих множество достижимости.
2. Методы туннельного типа, позволяющие за счет чередования стадий минимизации и туннельного выхода из уже найденных экстремумов, достигать решения в задачах невыпуклой траекторной оптимизации.
3. Алгоритм, основанный на принципе максимума Понтрягина, позволяющий за счет использования Гамильтониана и сопряженной системы дифференциальных уравнений получать управляющие воздействия в исходной ЗОУ.
4. Методики овыпукления множества допустимых скоростей управляемых динамических систем, позволяющие получить задачу с лучшими свойствами за счет формирования расширенной ЗОУ.
5. Метод покрытий, ориентированный на покрытие МД шарами, радиус которых зависит от оценки константы Липшида (увеличивается при удалении от экстремального значения целевого функционала).
6. Методика дискретизации, ориентированная на сведении исходной непрерывной задачи к последовательности конечномерных, с дальнейшим применением нелокального метода парабол для поиска областей, содержащих экстремумы целевого функционала.
7. Интегрирование системы дифференциальных уравнений в простых случаях реализуется с помощью стандартного метода Эйлера, а в более сложных задачах большой размерности используется метод Дормана–Принса, позволяющий подбирать шаг интегрирования и достигать более точных результатов [6].
8. Вспомогательный алгоритм локального поиска – алгоритм приведенного градиента, используется на завершающих этапах численного решения для уточнения результата, полученного на предыдущих этапах.
9. Алгоритмы генерации случайных управляющих воздействий, в которых заложена гипотеза о структуре управлений (функции релейного типа с заданным числом точек переключения, кусочно-линейные управляющие функции и сплайн-функции с обязательным проецированием на допустимое множество).

Решение соответствующей задачи траекторной оптимизации оценивается экспертами, и при необходимости также вносятся изменения в математическую модель. При исследовании прикладных динамических задач этот процесс может повторяться многократно и быть ориентирован на усложнение исходной модели для более точного описания динамического процесса и достижения требуемой точности получаемых решений.

**2.2. Задание значений алгоритмических параметров.** Проблема выбора наиболее подходящих значений алгоритмических параметров решается, как правило, в результате вычислительных экспериментов для каждой конкретной постановки задачи. Тем не менее могут быть сформированы рекомендации по их выбору по результатам многовариантного глубокого тестирования на коллекции невыпуклых тестовых задач оптимального управления.

1. Алгоритмы генерации стартовых управляющих воздействий в виде релейных функций зависят от алгоритмического параметра – число точек переключения, которое может быть фиксированным или выбираться из некоторого интервала. В результате тестирования установлено, что в большинстве случаев результативнее всего использовать управления с тремя точками переключения –  $u_{кр} = 3$  (табл. 1), но на этапе предоптимизационного анализа для конкретной задачи могут быть сформированы другие рекомендации. Для релейных функций со случайным числом точек переключения стандартным выбрано следующее значение:  $u_{кр} = 5$ .

2. Алгоритмы решения вспомогательной задачи Коши зависят от заданной точности интегрирования (стандартное значение равно  $10^{-8}$ ). Результативность и длительность работы алгоритмов интегрирования также зависит от максимального числа шагов, допустимого на каждом интервале дискретизации (значение этого параметра в стандартном варианте выбирается, например, равным 200 000).
3. Методика последовательной дискретизации опирается на выбор числа узлов сетки дискретизации, на первом этапе формируется поиск приближения к решению на сетке из 5 узлов, на втором – уточнение на более мелкой сетке, например, из 350 узлов.
4. Алгоритмы вспомогательного локального поиска зависят от выбора требуемой точности по функционалу, соответствующее значение может быть равным  $10^{-6}$  (табл. 1).

Выбор значений алгоритмических параметров может оказывать существенное влияние на результативность используемых вычислительных технологий. Поэтому при решении прикладных задач оптимального управления необходимо провести серию вычислительных экспериментов с целью нахождения значений параметров алгоритмов, при которых они наиболее эффективны при решении задач рассматриваемого типа и позволяют учитывать их особенности.

### **3. Тестирование программных реализаций алгоритмов невыпуклой оптимизации.**

Необходимо проводить сравнение новых разрабатываемых подходов с существующими в области оптимизации динамических систем методами, устранять возможные ошибки их программной реализации, исследовать свойства алгоритмов и выделять классы задач, для которых они наиболее эффективны. Тестирование алгоритмов и вычислительных технологий является основным методом экспериментальной оценки их эффективности, который традиционно опирается на использование коллекций тестов. Существуют хорошо известные тестовые коллекции задач математического программирования, авторами которых являются – К. Шитковский, В. Хок, К. Флоудас, П. Пардалос., Д. Мор и другие (см., например, [7, 8]). В области оптимизации управляемых динамических системы результаты не столь многочисленны (см., например, [9]). Проблема конструирования многоэкстремальных тестовых задач оптимального управления, позволяющих проводить сравнение и оценку эффективности методов невыпуклой оптимизации и соответствующих вычислительных технологий, продолжает оставаться актуальной.

**3.1. Методики генерации тестов.** Для включения в коллекцию тестов, построенных с учетом целенаправленного формирования характерных особенностей для задач невыпуклой оптимизации, разработана методика генерации тестов. Предложенная методика ориентирована на моделирование вычислительных трудностей для алгоритмов оптимизации нелинейных управляемых динамических систем и позволяет проводить сравнение и исследование свойств их программных реализаций, включает несколько взаимосвязанных этапов.

*На первом этапе* формируется система дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями. Построение системы основывается по одному из выбранных путей:

- *вариант 1* – использование описания известной механической системы с дальнейшим добавлением модификаций, таких, как, например, удлинение интервала времени, использование разных начальных приближений и ограничений на управления;
- *вариант 2* – построение простой системы путем введения двух вспомогательных управляющих воздействий в случае использования известной многоэкстремальной функции;

– вариант 3 – формирование невыпуклого МД (путем использования нелинейных зависимостей и тригонометрических функций) с дальнейшим добавлением линейного функционала с целью выбора направления, в котором структура МД наиболее сложная.

На втором этапе выбираются значения фазовых координат в начальной точке и интервал изменения времени (с увеличением которого сложность задачи может существенно возрасти).

На третьем этапе задаются ограничения на управляющие воздействия. В качестве эталонных выбраны геометрические ограничения (параллелепипедного типа), как одни из самых естественных и часто возникающих на практике. Ограничения более сложной структуры можно свести путем редукций и применения метода штрафных функций к стандартному виду. Далее осуществляется построение множества достижимости полученной управляемой динамической системы (рис. 3).

В результате анализа построенного множества достижимости выбирается терминальный функционал с целью получения нескольких экстремальных точек. Если МД выпуклое или при численном решении задачи найден только один экстремум, то выполняется последовательное усложнение теста: а) увеличивается интервал времени, б) редактируется множество допустимых управлений, в) изменяется целевой терминальный функционал.

На последнем этапе осуществляется визуализация полученного решения и оформление сгенерированной задачи. В многоэкстремальных задачах точное решение представлено достаточно редко, поэтому требование наличия известного решения, в соответствии с традиционным подходом в глобальной оптимизации, ослаблено и заменено на следующее – «должно быть представлено лучшее из известных в тестовой задаче решений» (принцип «best known»).

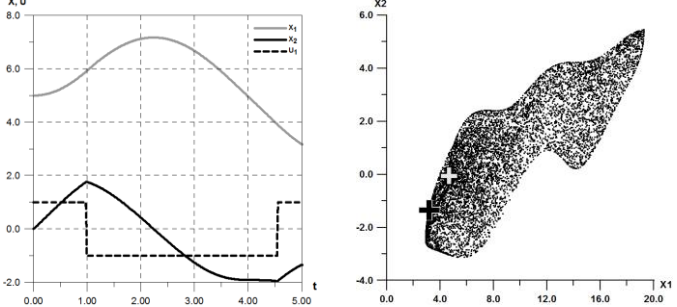
**3.2. Тестовая коллекция невыпуклых задач оптимального управления.** Среди нелинейных задач оптимального управления можно выделить классы задач различной вычислительной сложности, например, с учетом размера области притяжения глобального экстремума. Классическим примером невыпуклой тестовой динамической задачи является задача оптимального управления колебаниями нелинейного маятника (см., например, [5, 6]).



Рис. 3. Методика генерации невыпуклых тестовых ЗОУ

Колебательный процесс описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений (табл. 2).

**Таблица 2.** Тестовая ЗОУ колебаниями маятника: постановка, оптимальные траектории, управление и МД

Постановка тестовой задачи <sup>1</sup>	Оптимальные траектории и управления; множество достижимости и экстремальные точки
$\dot{x}_1 = x_2,$ $\dot{x}_2 = u - \sin x_1, t \in [0,5]$ $x_0 = (5, 0), u \in U = [-1, 1]$ $I(u) = x_1^2(t_1) + x_2^2(t_1) \downarrow$	

Минимальные значения функционала достигаются в точках, представленных в таблице 3. Результат получен за 4 сек. процессорного времени, при этом было решено 228 задач Коши.

**Таблица 3.** Результаты численного решения тестовой задачи

№ экстремума	Значение функционала	Координаты точки $(x_1, x_2)$
1	11.90876	(3.17863, -1.34354)
2	21.82921	(4.67180, -0.05900)
Число задач Коши: 228		CPU time: 4 сек.

Сформированная коллекция невыпуклых тестовых задач, включающая как сгенерированные целенаправленно тесты (п.3.1), так и известные ЗОУ (п.3.2), использована для тестирования разработанных специализированных программных средств оптимизации управляемых динамических систем. Реализованные алгоритмы и вычислительные технологии применялись для решения сложных прикладных задач квантовой физики [10], синтеза композитных конструкций, вычислительной химии [11], экономики, технической экологии и медицины [12] и многих других.

**Заключение.** В работе представлена методология синтеза многометодных нелокальных алгоритмов для невыпуклых задач оптимального управления ориентированная на исследование управляемых динамических процессов. Приведено описание математической, программной и технологической постановок задач, для решения которых предназначены разработанные программные средства невыпуклой оптимизации.

Представлена методика генерации многоэкстремальных тестовых задач, включенных в сформированную тестовую коллекцию, ориентированную на исследование свойств программных реализаций алгоритмов оптимизации нелинейных управляемых динамических систем. Приведены примеры тестовых задач и результаты их численного решения. Выделены наиболее трудоемкие в вычислительном плане задачи, наилучшим образом подходящие для сравнения и поиска эффективных модификаций алгоритмов решения нелинейных задач оптимального управления. Разработанные алгоритмы и специализированные программные средства невыпуклой оптимизации использованы при решении задач оптимального управления из различных научно-технических и промышленных областей.

<sup>1</sup> Gornov A.Y., Zarodnyuk T.S., Madzhara T.I., Daneyeva A.V., Veyalko I.A. A collection of test multiextremal optimal control problems. Springer Optimization and Its Applications, 2013, vol. 76, pp. 257–274.

**Благодарности.** Работа выполнена за счет государственного задания в рамках темы «Эволюционные и динамические управляемые системы: теория, численные методы, приложения» (шифр научной темы FWEW-2026-0011, № гос. регистрации 126021217177-7).

#### Список источников

1. Zarodnyuk T., Gornov A. Monowave boundary construction method for the non-convex reachable set of the controlled dynamical system. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics: International Conference on Optimization, Simulation and Control (Ulaanbaatar, Mongolia, June 20–22, 2023), 2023, vol. 434, pp. 117–127, DOI: 10.1007/978-3-031-41229-5\_9
2. Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S., Anikin A.S. et al. Extension technology and extrema selections in a stochastic multistart algorithm for optimal control problems. Journal of Global Optimization, 2020, vol. 76, no. 3, pp. 533–543, DOI: 10.1007/s10898-019-00821-x
3. Горнов А.Ю. Метод случайных покрытий для задачи оптимального управления / А.Ю. Горнов, Т.С. Зароднюк // Вычислительные технологии. 2012. – Т. 17. – №2. – С. 31–42.
4. Зароднюк Т.С. Алгоритм численного решения многоэкстремальных задач оптимального управления с параллелепипедными ограничениями / Т.С. Зароднюк // Вычислительные технологии. 2013. – Т. 18. – №2. – С. 46–54.
5. Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления / А.Ю. Горнов. – Новосибирск: Наука, 2009. – 279 с.
6. Тятюшкин А.И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем / А.И. Тятюшкин. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1992. – 193 с.
7. Floudas C.A., Pardalos P.M. A Collection of Test Problems for Constrained Global Optimization Algorithms. Springer-Verlag, 1990, 180 p.
8. Hock W., Schittkowski K. Test Examples for Nonlinear Programming Codes. Berlin: Springer, 1981, 177 p.
9. Betts J.T. A collection of optimal control test problems. 2015. Available at: <https://mechatronics.ucmerced.edu/sites/g/files/ufvvjh1226/f/page/documents/prbook-john-betts.pdf> (accessed: 02/27/2026).
10. Двуреченский А.В. Квантовые логические операции на спиновых состояниях в непрерывном СВЧ-поле / А.В. Двуреченский, А.Ю. Горнов, Т.С. Зароднюк, и др // Микроэлектроника. 2018. – Т. 47. – №4. – С. 49–58
11. Горнов А.Ю. Технология параллельной оптимизации для атомно-молекулярных кластеров Морса / А.Ю. Горнов, А.С. Аникин, П.С. Сороковиков, и др // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2021. – №4(24). – С. 60–67.
12. Efimova N.V., Bobkova E.V., Zarodnyuk T.S. et al. Age trend in the mortality from diseases of the circulatory system during the pandemic under a decrease in air pollution. Gigiena i Sanitariya, 2024, vol. 103, no 9, pp. 925–931.

**Зароднюк Татьяна Сергеевна.** Кандидат технических наук, зав. лабораторией Оптимального управления Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН. Scopus AuthorID: 42462876400, AuthorID: 520189, SPIN: 2042-5313, ORCID: 0000-0003-2170-689X. tz@icc.ru. Россия, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, а/я 292.

UDC 517.977.58

DOI:10.25729/ESI.2026.42.2.014

## Specialized algorithms and software for optimizing nonlinear controlled dynamical systems

Tatiana S. Zarodnyuk

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Russia, Irkutsk, tz@icc.ru

**Abstract.** The developed algorithms for solving nonlinear optimal control problems and approximating non-convex reachable sets formed the basis for specialized software constructed for studying nonlinear controlled

dynamical systems. Such systems arise in various scientific, technical, and industrial fields and are characterized by a high degree of complexity (nonlinear dynamical systems and non-convex objective functionals). Therefore, their effective solution requires the use of algorithms that take into account the specific characteristics of these problems. The paper proposes appropriate computational technologies based on both classical approaches based on sequential discretization of continuous problems and the application of Pontryagin's maximum principle, as well as on the specific properties of the dynamical systems, such as the linear connectivity of the reachable set and the hidden convexity of the admissible velocities set of controlled dynamical systems. Pre-optimization analysis methods (estimating the degree of the objective functionals convexity and constructing the boundary of the reachable set) are also implemented as programs that allow for the initial assessment of the computational complexity of applied non-convex optimization problems and the selection of effective numerical methods for their solution. Descriptions of the mathematical, software, and technological formulations of studied non-convex optimal control problems are provided. A framework for synthesizing multi-method non-local algorithms for optimizing controlled dynamical systems is presented.

The stages of constructing the computational scheme and the specifics of selecting algorithmic parameter values are described. A developed test collection of nonlinear optimal control problems is used to test software implementations of non-convex optimization algorithms to study their limiting properties and find effective modifications. The collection includes both published problems with known solutions and problems generated using the proposed test generation methodology. The developed algorithms and corresponding software were used to solve practical problems in various scientific and technical fields: flight dynamics and space navigation, quantum physics and computational chemistry, synthesis of composite structures, economics, medicine, technical ecology, and other areas.

**Keywords:** algorithms for non-convex optimization, optimal control problems, nonlinear controlled dynamical systems

**Acknowledgements:** The research was carried out at the expense of the state assignment within the framework of the topic "Evolutionary and Dynamic Controlled Systems: Theory, Numerical Methods, and Applications" (scientific code FWEW-2026-0011, No.~ registration 126021217177-7).

### References

1. Zarodnyuk T., Gornov A. Monowave boundary construction method for the non-convex reachable set of the controlled dynamical system. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics: International Conference on Optimization, Simulation and Control (Ulaanbaatar, Mongolia, June 20–22, 2023), 2023, vol. 434, pp. 117–127, DOI: 10.1007/978-3-031-41229-5\_9
2. Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S., Anikin A.S. et al. Extension technology and extrema selections in a stochastic multistart algorithm for optimal control problems. Journal of Global Optimization, 2020, vol. 76, no. 3, pp. 533–543, DOI: 10.1007/s10898-019-00821-x
3. Gornov A.Yu., Zrodnyuk T.S. Metod sluchajny`x pokry`tij dlya zadachi optimal`nogo upravleniya [Stochastic covering method for optimal control problem]. Vychislitel'nyye tekhnologii [Computational technologies], vol. 17, no 2, pp. 31–42.
4. Zarodnyuk T.S. Algoritm chislennogo resheniya mnogoe`kstremal`ny`x zadach optimal`nogo upravleniya s parallelepipedny`mi ogranicheniyami [An algorithm for the numerical solution of multi-extremal optimal control problems with parallelepiped constraints]. Vychislitel'nyye tekhnologii [Computational technologies], 2013, vol. 18, no. 2, pp. 46–54.
5. Gornov, A.Yu. Vy`chislitel`ny`e tekhnologii resheniya zadach optimal`nogo upravleniya [Computational technologies for solving optimal control problems]. Novosibirsk, Nauka, 2009, 279 p.
6. Tyatyushkin A.I. Chislenny`e metody` i programmny`e sredstva optimizacii upravlyaemy`x sistem [Numerical methods and software for optimization of controlled systems]. Novosibirsk, Nauka, 1992, 193 p.
7. Floudas C.A., Pardalos P.M. A Collection of Test Problems for Constrained Global Optimization Algorithms. Springer-Verlag, 1990, 180 p.
8. Hock W., Schittkowski K. Test Examples for Nonlinear Programming Codes. Berlin: Springer, 1981, 177 p.
9. Betts J.T. A collection of optimal control test problems. 2015. Available at: <https://mechatronics.ucmerced.edu/sites/g/files/ufvvh1226/f/page/documents/prbook-johnbetts.pdf> (accessed: 02/27/2026).
10. Dvurechenskii A.V., Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S. et al. Kvantovyye logicheskiye operatsii na spinovykh sostoyaniyakh v nepreryvnom SVCh-pole [Quantum logic operations on spin states in a continuous microwave field]. Mikroelektronika [Russian Microelectronics], 2018, vol. 47, no. 4, pp. 49–58. (English version: Zinovieva A.F., Nenashev A.V., Koshkarev A.A., Zarodnyuk T.S., Gornov A.Y., Dvurechenskii A.V. Quantum gates with

spin states in continuous microwave field. *Russian Microelectronics*, 2018, vol. 47, no. 4, pp. 268–278, DOI: 10.1134/S1063739718040147.)

11. Gornov A.Yu., Anikin A.S., Sorokovikov P.S. et al. *Texnologiya parallel'noj optimizacii dlya atomno-molekulyarny`x klasterov Morsa* [Parallel optimization technology for atomic-molecular Morse clusters]. *Informatsionnyye i matematicheskiye tekhnologii v nauke i upravlenii* [Information and mathematical technologies in science and management], 2021, no 4 (24), pp. 60–67.

12. Efimova N.V., Bobkova E.V., Zarodnyuk T.S. et al. Age trend in the mortality from diseases of the circulatory system during the pandemic under a decrease in air pollution. *Gigiena i Sanitariya*, 2024, vol. 103, no 9, pp. 925–931.

**Zarodnyuk Tatiana Sergeevna.** *PhD, Head of The Laboratory of Optimal Control is Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS. Scopus AuthorID: 42462876400, AuthorID: 520189, SPIN: 2042-5313, ORCID: 0000-0003-2170-689X. tz@icc.ru. Russia, Irkutsk, Lermontov Street, 134.*

*Статья поступила в редакцию 13.05.2026; одобрена после рецензирования 18.05.2026; принята к публикации 25.05.2026.*

*The article was submitted 05/13/2026; approved after reviewing 05/18/2026; accepted for publication 05/25/2026.*