

## Математическое моделирование и его применение в научных исследованиях

УДК 004.94

DOI:10.25729/ESI.2025.40.4.006

### Комбинаторная модель изделия на основе разрезаний гиперграфа

Божко Аркадий Николаевич, Грошев Сергей Владимирович, Кузьмина Инна Анатольевна, Родионов Сергей Владимирович

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет),

Россия, Москва, s.groshev@bmstu.ru

**Аннотация.** В работе предлагается новая математическая модель изделия комбинаторного типа. Она формируется на основе всевозможных правильных разрезаний гиперграфа механической структуры на два связных подграфа и представляется в виде И-ИЛИ-дерева. Это дерево описывает все связные и координированные фрагменты изделия и отношение включения таких фрагментов. Модель можно использовать для синтеза различных проектных решений технической подготовки дискретного производства: планов сборки и разборки, разбиений на сборочные единицы и пр. И-ИЛИ-дерево разрезаний дает объективную информацию для глубокого структурного анализа сложных технических систем.

**Ключевые слова:** сборка, автоматизированное проектирование процесса сборки, планирование перемещений, пространство состояний, гиперграфовая модель

**Цитирование:** Божко А.Н. Комбинаторная модель изделия на основе разрезаний гиперграфа / А.Н. Божко, С.В. Грошев, И.А. Кузьмина, С.В. Родионов // Информационные и математические технологии в науке и управлении, 2025. – № 4(40). – С. 78-89. – DOI:10.25729/ESI.2025.40.4.006.

**Введение.** Сборка – это важнейший передел дискретного производства. Сложность промышленных изделий постоянно возрастает. Некоторые современные технические системы состоят из десятков тысяч (и более) деталей и комплектующих. Поэтому автоматизация проектирования процессов сборки (Computer aided assembly planning, CAAP), безусловно, является важной научно-технической проблемой. Первые исследования и разработки в области CAAP начались в 80-е годы прошлого столетия. Корпус работ данной тематики активно пополняется в наше время. Так, в обзорной статье [1] цитируются более сотни актуальных современных публикаций, посвященных различным аспектам автоматизации проектирования процессов сборки/разборки. Классификация основных подходов, используемых в CAAP-системах, показана на рис. 1 [2].

**Методы искусственного интеллекта.** Методы ИИ применяются в CAAP-системах для моделирования принятия рациональных решений при проектировании последовательности сборки изделия и разработке сборочных операций [3,4,5,6]. По бинарным отношениям предпочтения/безразличия, которые определяются на множестве деталей геометрией изделия и структурой изделия, формируются прикладные базы знаний. Для их формализации используются различные варианты семантических сетей или фреймов. Генерация проектных решений выполняется при помощи специализированных алгоритмов извлечения релевантной информации из баз [7-10].

**Методы геометрического вывода.** Геометрия изделия – важнейшая часть любой конструкции. Она может накладывать жесткие ограничения на проектные решения сборочного передела. В методах, основанных на геометрическом выводе (геометрической разрешимости), проектирование последовательности сборки изделия ставится и решается, как геометрическая задача. Она заключается в поиске свободной от столкновений траектории движения монтируемой детали или сборочной единицы в среде со статическими препятствиями [11-13]. Для уменьшения вычислительной сложности детали со сложной

геометрией представляются простыми геометрическими формами: параллелепипедами, многогранниками, выпуклыми оболочками, заметаниями [12]. В [13, 14] описан метод геометрической разрешимости, основанный не на глобальном геометрическом анализе сцены, а на исследовании некоторой окрестности монтируемой детали.



**Рис. 1.** Классификация моделей и методов автоматизированного проектирования сборочных процессов

**Методы планирования перемещений.** В методах этой группы моделирование сборочных процессов и операций выполняется в многомерном конфигурационном пространстве собираемого изделия. В нем монтируемая деталь или сборочная единица представляется точкой. Требуется найти траекторию перемещения детали или СЕ в служебное положение в среде с препятствиями. В терминах конфигурационного пространства можно выразить не только геометрические ограничения на перемещения монтируемых деталей, но и устойчивость, размерные и кинематические связи деталей в составе изделия [15-19].

**Методы оптимизации.** Во множестве актуальных публикаций [20-22] обсуждается применение методов дискретной оптимизации для выбора рациональных проектных решений в СААР-системах. Чаще всего для этого используют современные подходы к решению оптимизационных задач, основанные на бионических аналогиях, например: генетические алгоритмы, алгоритм колонии муравьев, алгоритм роя пчел и др. Во всех работах этого типа предполагается, что исходное множество альтернатив (последовательностей сборки или вариантов декомпозиции на сборочные единицы) задано априори. В работах этого направления не обсуждается основная проблема автоматизации проектирования сборочных процессов – формализация закономерностей принятия рациональных решений в СААР-системах.

**Интерактивные методы.** Методы этой группы – исторически первые систематические методы автоматизированного проектирования последовательности сборки изделия. Так, в [23] предложена процедура упорядочения механических связей технической системы. В ней эксперту предлагаются вопросы о возможной последовательности реализации механических связей изделия (соединений и сопряжений). Компьютер обрабатывает ответы лица, принимающего решение, и строит допустимый план сборки. В [24-26] обсуждаются различные варианты этого подхода. Целью этих исследований является уменьшение трудоемкости экспертного опроса и повышение его надежности. В современных исследованиях по СААР интерактивный подход реализуется не при помощи прямой экспертизы, а посредством прототипирования процессов сборки в системах виртуальной

реальности [27-31]. Теперь эксперт выступает в роли оператора системы оператора такой системы, выполняя компьютерный эксперимент по сборке сложного изделия.

**Комбинаторные методы.** В многочисленных методах этой группы изделие рассматривается, как множество деталей, на котором определены различные бинарные и многоместные отношения. Эти отношения индуцируются геометрическими, структурными размерными, кинематическими и другими ограничениями на возможные последовательности сборки и варианты декомпозиции изделия на сборочные единицы. Для описания отношений чаще всего используют графы, сети Петри и матрицы [32-35].

**Графовая модель механической структуры изделия.** Один из самых известных методов комбинаторного класса предложен в [35]. В нем механическая структура изделия представляется в виде так называемого графа механических связей (Liaison diagram). Приведем точное определение этой простой, но содержательной структурной модели. В графе механических связей  $G = (X, S)$  множество вершин  $X$  описывает детали изделия, а множество ребер  $S$  – механические связи (соединения и сопряжения) между парами деталей. В качестве примера рассмотрим конструкцию приводного вала (рис. 2). На Рис. 3. Граф связей приводного вала представлен график механических связей этого изделия.

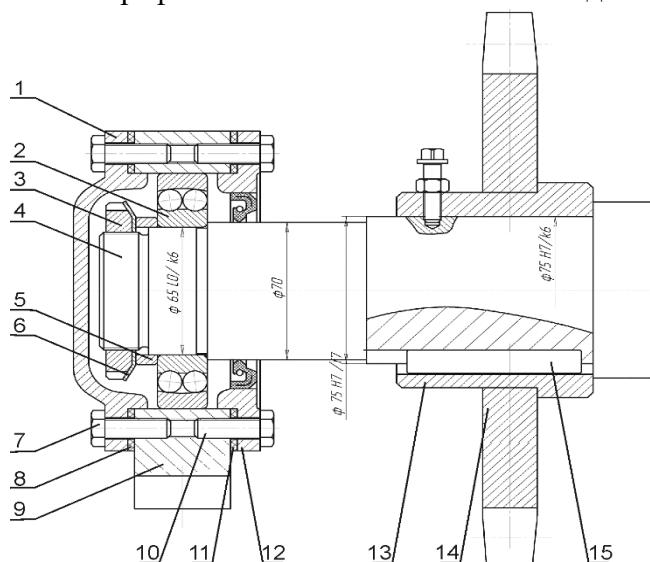


Рис. 2. Конструкция приводного вала

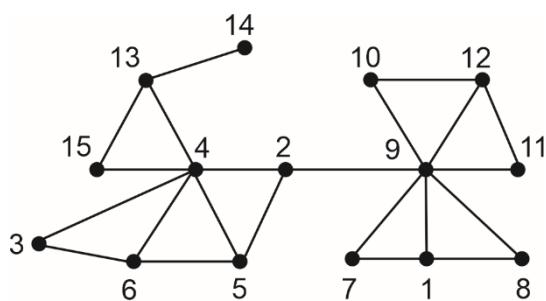


Рис. 3. Граф связей приводного вала

В терминах графа связей можно описать важнейшие свойства проектных решений сборочного передела: когерентность сборочных операций и планов [1] и связность сборочных единиц и узлов [34]. По этим причинам данная модель служит основой для нескольких систематических методик автоматизированного проектирования. Так, в [34] описан метод автоматизированного разбиения сложного изделия на сборочные единицы, которые собираются независимо. В его основе лежит разрезание графа связей на кластеры – связные

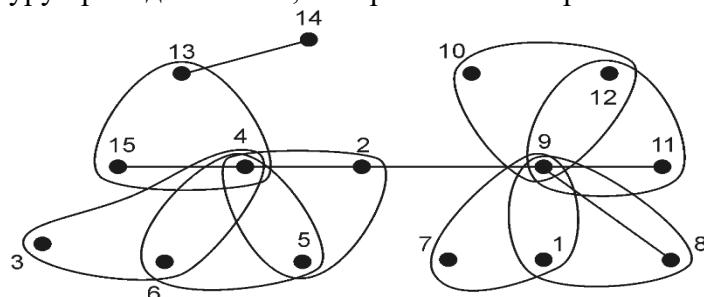
подграфы, у которых есть хотя бы одна базовая деталь и их внутренняя связность значительно превосходит внешнюю.

В [35] предложен метод иерархического многоуровневого разрезания графа на две связные компоненты (*bi-partitioning*). Результаты этой процедуры фиксируются в виде И-ИЛИ-дерева, в котором связки представляют разрезания, а внутренние вершины – связные подграфы, полученные делением родительского подграфа на две части. И-ИЛИ-дерево включает в себя образы всех фрагментов изделия, которые можно получить при помощи когерентных сборочных операций, поэтому его можно использовать для генерации различных проектных решений сборочного передела в дискретном производстве.

Однако граф механических связей и его производные модели имеют существенный недостаток. Любое состояние изделия в процессе сборки должно связным координированным и устойчивым. Граф механических связей позволяет учесть только первое из этих свойств. Геометрическая координация и устойчивость деталей изделия достигается при помощи базирования по внутренним конструкторским базам. Это чаще всего участки поверхностей, с которыми монтируемая деталь находится в контакте. Число таких баз может колебаться от единицы до шести (по числу степеней свободы абсолютно твердого тела в пространстве). Поэтому базирование является многоместным отношением и, в общем случае, не может быть корректно представлено при помощи бинарных математических структур, например, графов. В [36, 37] разработана гиперграфовая модель механической структуры сложной технической системы. Эта модель описывает базирование как многоместное отношение на множестве деталей изделия.

**Гиперграфовая модель механической структуры изделия.** Пусть, по-прежнему, множество деталей технической системы – (ТС). Механическую структуру ТС зададим в виде гиперграфа  $H = (X, R)$ , у которого множество вершин  $X$  соответствует деталям ТС, а множество гиперребер  $R$  – минимальные геометрически определенные подмножества деталей, координация которых достигается базированием по внутренним конструкторским базам.

На Рис. 4. Гиперграф приводного вала показан гиперграф  $H_s = (X_s, R_s)$ , описывающий механическую структуру приводного вала, изображенного на рис. 2.



**Рис. 4. Гиперграф приводного вала**

Предложенная гиперграфовая модель оказалась весьма содержательной. Ее можно использовать как для глубокого структурного анализа новых проектов, так и для генерации различных проектных решений сборочного передела.

Введем точные определения.

**Определение 1.** Сборочная операция называется когерентной, если она реализует механические связи между деталями.

**Определение 2.** Сборочная операция называется секвенциальной (бинарной), если ее можно выполнить при помощи двух рабочих органов.

В подавляющем большинстве случаев сборка изделий в дискретном производстве выполняется посредством когерентных и секвенциальных сборочных операций [1].

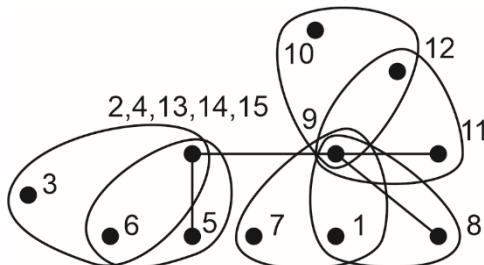
**Определение 3.** Нормальным стягиванием будем называть операцию, в результате которой отождествляются две вершины гиперграфа  $H = (X, R)$ , связанные ребром второй степени, и удаление этого ребра.

Нормальное стягивание – это математическое описание когерентной секвенциальной сборочной операции. Пусть гиперграф  $H = (X, R)$  представляет механическую структуру некоторого изделия. Последовательность нормальных стягиваний, которая трансформирует  $H = (X, R)$  в точку, является математическим описанием когерентного и секвенциального сборочного плана [36].

**Определение 4.** Гиперграф, для которого существует последовательность нормальных стягиваний ребер, преобразующая его в точку, будем называть s-гиперграфом.

Итак, корректной математической моделью механической структуры технической системы служит *s*-гиперграф. Его стягиваемость – это точное математическое описание собираемости изделия. *S*-подграфы *s*-гиперграфа представляют собой формальные образы фрагментов изделия, которые можно собрать независимо: конструкторских или технологических сборочных единиц, узлов и пр.

Рассмотрим стягивание гиперграфа, изображенного на рис. 4. Вектор  $(4, 15, 13, 14, 2, 9, 5, 6, 3, 11, 12, 10, 8, 1, 7)$  представляет собой описание когерентного секвенциального плана сборки приводного вала. Этот план описывается в виде последовательности нормальных стягиваний, в которой каждая вершина присоединяется к стянутому фрагменту гиперграфа при помощи стягивания некоторого ребра второй степени. На Рис. 5. Гиперграф, описывающий состояние вала после установки деталей  $2, 4, 13, 14, 15$  показано состояние гиперграфа  $H_s = (X_s, R_s)$  перед стягиванием вершины с номером 9.



**Рис. 5.** Гиперграф, описывающий состояние вала после установки деталей 2, 4, 13, 14, 15

В [37] доказана простая и важная теорема о необходимых условиях стягиваемости гиперграфов.

**Теорема 1.** Если гиперграф  $H = (X, R)$  стягивается, то:

- 1) во множестве  $R$  существует по крайне мере одно ребро второй степени;
  - 2) гиперграф  $H$  является связным;
  - 3) выполняется равенство  $|X| = |R| + 1$ .

Приведем содержательные аргументы, обосновывающие справедливость данной теоремы. Очевидно, что преобразование  $s$ -гиперграфа в точку начинается со стягивания некоторого ребра второй степени, что доказывает его наличие в гиперграфе (условие 1). Успешное завершение процедуры стягиваний свидетельствует о связности гиперграфа (условие 2).

Рассмотрим необходимость третьего условия. Ребра гиперграфа  $H = (X, R)$  представляют минимальные геометрические подмножества деталей, полученные базированием по внутренним конструкторским базам. Путь выбрана некоторая последовательность сборки изделия. Первая в этой последовательности деталь монтируется

по внешним базам, которые доставляет ей сборочное приспособление или монтажный стол. Этой детали не требуются внутренние конструкторские базы. Для каждой последующей в этом упорядочении детали нужен только один комплект баз, который обеспечивает ей собранный фрагмент изделия, что доказывает справедливость условия 3.

**Разрезания гиперграфа.** На ранних этапах проектирования в современных CAD и СААР-системах детали изделия считаются невесомыми и абсолютно твердыми телами. С учетом этих упрощающих предположений сборка и разборка изделия являются взаимообратимыми процессами. Это дает возможность моделировать сборочные операции, как операции демонтажа. Очевидно, что математическим описанием операции разборки служит разрезание гиперграфа, описывающего механическую структуру изделия, на два или более подграфа, которые не связаны между собой.

Введем точные определения. Пусть задан гиперграф  $H = (X, R)$ , а  $A \subseteq X$  – подмножество его вершин.

**Определение 5.** Подграф  $[A] = (A, R_A)$  гиперграфа  $H = (X, R)$  называется порожденным множеством вершин  $A$ , если он содержит те и только те ребра, которые инцидентны вершинам из множества  $A$  в  $H$ .

Если задан гиперграф  $H = (X, R)$ , то для полного определения порожденного подграфа достаточно указать множество его вершин  $A$ .

Пусть  $H = (X, R)$  стягивается в точку, то есть является  $s$ -гиперграфом.

**Определение 6.** Вектор  $(A, B)$ ,  $A, B \subseteq X$ , называется разрезанием гиперграфа  $H = (X, R)$ , если пара  $(A, B)$  представляет собой разбиение множества вершин  $X$ , а подграфы  $[A]$  и  $[B]$ , порожденные в  $H$  множествами вершин  $A$  и  $B$ , являются стягиваемыми.

**Теорема 2.** Для того, чтобы разбиение  $A \cup B = X, A \cap B = \emptyset$  множества вершин  $X$  представляло собой разрезание в смысле определения 6, требуется удалить только одно ребро  $s$ -гиперграфа  $H = (X, R)$ .

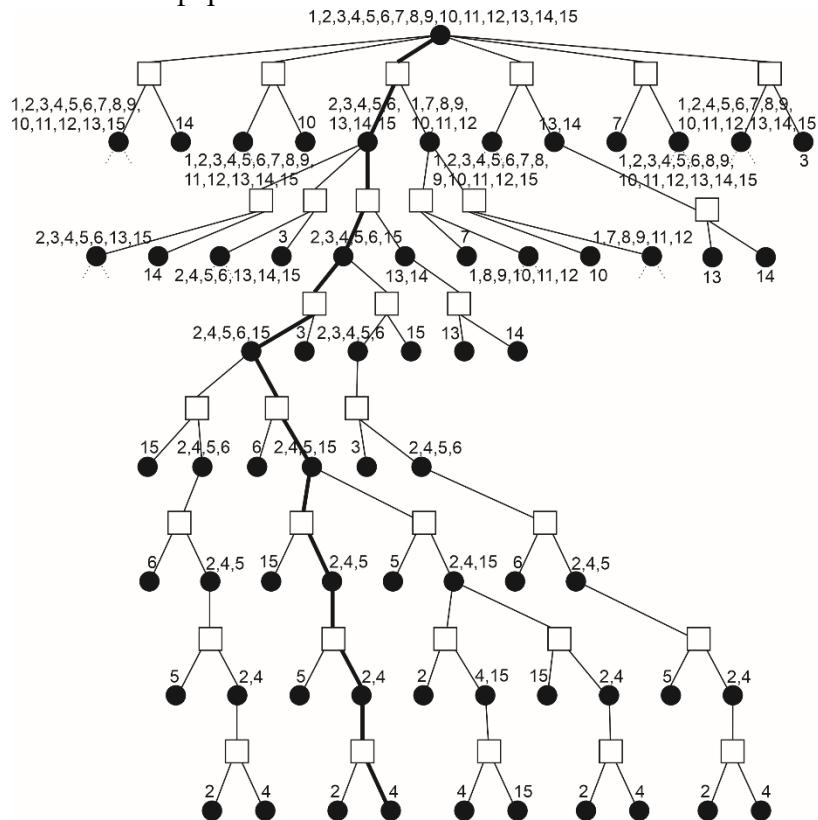
Доказательство. Пусть  $(A, B)$  – разрезание. Рассмотрим два подграфа  $[A] = (A, R_A)$  и  $[B] = (B, R_B)$ , которые порождены в гиперграфе  $H$  множествами вершин  $A$  и  $B$ . Из определения разрезания следует, что эти подграфы являются стягиваемыми, а значит, для них выполняются равенства  $|A| = |R_A| + 1$  и  $|B| = |R_B| + 1$ . Если сложить эти равенства, то получим  $|A| + |B| = |R_A| + |R_B| + 2$ . Поскольку  $(A, B)$  – разбиение множества вершин, то  $|A| + |B| = |X|$ . Отсюда следует, что  $|X| = |R_A| + |R_B| + 2$ . С другой стороны, для  $H = (X, R)$  выполняется равенство  $|X| = |R| + 1$ , поэтому  $|R| = |R_A| + |R_B| + 1$ . Теорема доказана.

**И-ИЛИ-дерево разрезаний гиперграфа.** Доказанная простая теорема дает конструктивный способ получения различных разрезаний  $s$ -гиперграфа на  $s$ -подграфы, а именно, удаление любого ребра гиперграфа  $H$ , которое является мостом, дает разрезание в смысле определения 6.

Разрезание  $s$ -гиперграфа порождает два  $s$ -подграфа, к которым, в свою очередь можно применить операцию разрезания. Реализуем все возможные применения этой операции, вплоть до элементарных подграфов, которыми являются отдельные вершины. Результаты этой рекурсивной процедуры удобно представить в виде И-ИЛИ-дерева. Корень дерева – исходный  $s$ -гиперграф  $H = (X, R)$ , внутренние вершины представляют собой  $s$ -подграфы, полученные

при помощи разрезаний, листья дерева – это вершины гиперграфа  $H$ , а связки описывают сами разрезания.

На рис. 6 показан фрагмент И-ИЛИ-дерева разрезаний гиперграфа  $H_s = (X_s, R_s)$ , представленного на рис. 4. Это большая комбинаторная модель, полное изображение которой просто невозможно на листе формата А4.



**Рис. 6. И-ИЛИ-дерево разрезаний гиперграфа**

Квадратные вершины белого цвета обозначают связки второй степени И-ИЛИ-дерева.

Обозначим  $T(H)$  И-ИЛИ-дерево разрезаний гиперграфа  $H = (X, R)$ . Дерево  $T(H)$  включает в себя всевозможные  $s$ -подграфы, которые можно получить из  $s$ -гиперграфа при помощи разрезаний. Эти подграфы служат образами различных конструктивных частей изделия, которые обладают связностью и геометрической координацией, необходимой для независимой сборки. Это конструкторские и технологические сборочные единицы, узлы, опытные сборочные единицы, состояния изделия в процессе сборки или разборки и др. Дерево  $T(H)$  – это очень информативный носитель, который можно использовать для синтеза разнообразных проектных решений при сборке, разборке, ремонте, испытаниях, регулировке, пригонке и других операциях с изделием. Перечислим некоторые из них.

Разрезание представляет собой математическое описание операции разборки. В силу взаимной обратимости операций и планов сборки/разборки на ранних этапах проектирования обратная операция, которая заключается в соединении двух листов разрезания, служит описанием когерентной и секвенциальной операции сборки. Цепь с началом в листе и окончанием в корне дерева  $T(H)$  представляет последовательность сборки. Максимальные цепи соответствуют линейным последовательностям, немаксимальные цепи – нелинейным.

На Рис. 6. И-ИЛИ-дерево разрезаний гиперграфа показана эмфазой немаксимальная цепь, представляющая нелинейную последовательности сборки  $\{4, 2, 5, 15, 6, 3, 13, 14\}, \{1, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ). В этой последовательности детали, номера которых заключены в фигурные скобки, поступают на общую сборку в собранном виде.

Нисходящие цепи дерева  $T(H)$  служат моделями различных планов разборки: полной, неполной, линейной, нелинейной и др. Если максимальная цепь начинается в корне дерева, а завершается в листе, то это план полной линейной разборки. Нисходящая цепь, которая начинается в корне, а завершается во внутреннем узле, представляет собой план частичной разборки.

Дерево  $T(H)$  содержит данные для глубокого структурного анализа изделия. В частности, она позволяет оценить «глубину вложенности» детали или сборочной единицы в конструкцию. Это важная техническая характеристика для операций разборки, ремонта и технического обслуживания сложной технической системы.

Оценим «глубины вложенности» числом деталей, которые предварительно нужно удалить из состава изделия перед демонтажем данной детали. Будем считать все соединения разъемными.

Обозначим  $I$  корень дерева  $T(H)$ . Нисходящую цепь с началом в корне и окончанием в некоторой внутренней вершине  $A$  обозначим  $(I, A)$ , а длину этой цепи –  $l(I, A)$ . Пусть искомая деталь –  $x$ . Найдем все максимальные цепи  $(I, A)$ , такие, что  $x \notin A$ . Тогда оценкой структурной вложенности детали  $x$  в состав изделия является число  $\min_{x \notin A} l(I, A)$ . Так, глубина вложения детали с номером 9 (рис. 3) равна восьми.

Приведенными примерами не исчерпывается применение описанной комбинаторной модели для структурного анализа сложных изделий и генерации проектных решений в CAD и СААР-системах. Так, в [36] предложен метод автоматизированного синтеза декомпозиций изделия на сборочные единицы. Он заключается в поиске иерархически упорядоченного множества, вписанного в И-ИЛИ-дерево  $T(H)$ .

### Заключение.

1. Геометрическая координация элементов изделия – это важнейшее конструктивное свойство, которое необходимо обеспечить в различных операциях технической подготовки производства: сборке, разборке, ремонте, регулировки и пр. В механических конструкциях она достигается при помощи базирования по внутренним конструкторским базам, которые, в общем случае, могут принадлежать нескольким различным деталям. Поэтому базирование – это многоместное отношение, которое не способны точно описать бинарные математические структуры (графы, сети и матрицы). Корректной математической моделью механической структуры изделия (машины или прибора) служит  $s$ -гиперграф.

2. Разрезание  $s$ -гиперграфа – это математическое описание операции разборки. На ранних этапах проектирования в CAD и СААР-системах операции и планы сборки/разборки считаются взаимо обратимыми. Поэтому разрезание – это модель когерентной секвенциальной сборочной операции. В терминах разрезаний можно описать большое число проектных решений сборочного передела.

3. В работе предложен универсальный носитель проектной информации – И-ИЛИ-дерево разрезаний гиперграфа. Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях существования разрезаний. Показано, что этот носитель можно использовать для принятия различных проектных решений: планов сборки/разборки, структурного анализа конструкции, синтеза сборочных декомпозиций и др.

### Список источников

1. Ghandi S., Masehian E. Review and taxonomies of assembly and disassembly path planning problems and approaches. Computer-Aided Design, 2015, vol. 67-68, pp. 58-86. DOI: 10.1016/j.cad.2015.05.001.

2. Божко А.Н. Методы искусственного интеллекта в автоматизированном проектировании процессов сборки / А.Н. Божко, С.В. Родионов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн., 2016. – №8. – DOI: 10.7463/0816.0844719.
3. Rabemanantsoa M., Pierre S. An artificial intelligence approach for generating assembly sequence in CAD/CAM. Artificial Intelligence in engineering, 1996, vol. 10, no. 2, pp. 97-107, DOI: 10.1016/0954-1810(95)00018-6.
4. Meng Y., Gu T., Chang L. Reasoning about assembly sequences based on description logic and rule. Intelligent Information Processing VI, IFIP Advances in information and communication technology, 2012, vol. 385, pp. 131-136, DOI: 10.1007/978-3-642-32891-6\_18.
5. Seow K., Devanathan R. Temporal logic programming for assembly sequence planning. Artificial Intelligence in Engineering, 1993, vol. 8, no. 4, pp. 253-263, DOI: 10.1016/0954-1810(93)90008-4.
6. Jung J., Billatos S. An expert system for assembly based on axiomatic design principles. Journal of Intelligent and robotic systems, 1993, vol. 8, no. 2, pp. 245-265, DOI: 10.1007/BF01257997.
7. Hsu Y., Tai P., Wang M. A knowledge-based engineering system for assembly sequence planning. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2011, vol. 55, no. 5, pp. 763-782, DOI: 10.1007/s00170-010-3093-5.
8. Bonneville F., Perrard C., Henriod J. A genetic algorithm to generate and evaluate assembly plans. 1995 INRIA/IEEE Symposium on Emerging Technologies and Factory Automation. Proceedings. ETFA, 1995, vol. 2, pp. 231-239, DOI: 10.1109/ETFA.1995.496663.
9. Hui W., et al. Assembly planning based on semantic modeling approach. Computers in industry, 2007, vol. 58, no. 3, pp. 227-239, DOI: 10.1016/j.compind.2006.05.002.
10. Zha X., Lim S., Fok S. Integrated knowledge-based assembly sequence planning. The International Journal of advanced manufacturing technology, 1998, vol. 14, no. 1, pp. 50-64, DOI: 10.1007/BF01179417.
11. Toussaint G. Movable separability of sets. Machine intelligence and pattern recognition, 1985, vol. 2, pp. 335-375, DOI: 10.1016/B978-0-444-87806-9.50018-9.
12. Krishnan S., Sanderson A. Reasoning about geometric constraints for assembly sequence planning. 1991 IEEE International conference on robotics and automation. Proceedings, 1991, vol. 1, pp. 776-782, DOI: 10.1109/ROBOT.1991.131680.
13. Su Q. Computer aided geometric feasible assembly sequence planning and optimizing. The International Journal of advanced manufacturing technology, 2007, vol. 33, no. 1, pp. 48-57, DOI: 10.1007/s00170-006-0658-4.
14. Woo T., Dutta D. Automatic disassembly and total ordering in three dimension. Journal of engineering for industry, 1991, vol. 113, no. 2, pp. 207-213, DOI: 10.1115/1.2899679.
15. Wan W., Harada K., Nagata K. Assembly sequence planning for motion planning. Assembly automation, 2018, vol. 38, no. 2, pp. 195-206, DOI: 10.1108-AA-01-2017-009.
16. Chang H., Li T.Y. Assembly maintainability study with motion planning. Proceedings of 1995 IEEE International conference on robotics and automation, 1995, vol. 1, pp. 1012-1019, DOI: 10.1109/ROBOT.1995.525415.
17. Morato C., Kaipa K.N., Gupta S.K. Improving assembly precedence constraint generation by utilizing motion planning and part interaction clusters. Computer-aided design, 2013, vol. 45, no. 11, pp. 1349-1364, DOI: 10.1016/j.cad.2013.06.005.
18. Sundaram S., Remmler I., Amato N.M. Disassembly sequencing using a motion planning approach. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International conference on robotics and automation (Cat. No.01CH37164), 2001, vol. 2, pp. 1475-1480, DOI: 10.1109/ROBOT.2001.932818.
19. Wan W., Harada K., Nagata K. Assembly sequence planning for motion planning. Assembly Automation, 2018, vol. 38, no. 2, pp. 195-206, DOI: 10.1108-AA-01-2017-009.
20. Mohd Fadzil F., Ab Rashid F. A Hybrid Ant-wolf algorithm to optimize assembly sequence planning problem. Assembly Automation, 2017, vol. 37, no. 2, DOI: 10.1108-AA-11-2016-143.
21. Lu C., Fuh J., Wong Y. Advanced assembly planning approach using a multi-objective genetic algorithm. Collaborative product assembly design and assembly planning, 2011, pp. 107-146, DOI: 10.1533/9780857093882.107.
22. Bahubalendruni R., Biswal B., Deepak B. Optimal robotic assembly sequence generation using particle swarm optimization. Journal of automation and control engineering, 2016, vol. 4, no. 2, pp. 89-95, DOI: 10.12720/joace.4.2.89-95.
23. Bourjault A. Methodology of Assembly Automation: A New Approach. Robotics and Factories of the Future '87, 1988, pp. 37-45, DOI: 10.1007/978-3-642-73890-6\_6.
24. De Fazio T., Whitney D. Simplified generation of all mechanical assembly sequences. IEEE Journal on robotics and automation, 1987, vol. 3, no. 6, pp. 640-658, DOI: 10.1109/JRA.1987.1087132.
25. Baldwin D., et al. An integrated computer aid for generating and evaluating assembly sequences for mechanical products. IEEE Transactions on robotics and automation, 1991, vol. 7, no. 1, pp. 78-94, DOI: 10.1109/70.68072.

26. Wilson R. Minimizing user queries in interactive assembly planning. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 1995, vol. 11, no. 2, pp. 308-312, DOI: 10.1109/70.370514.
27. Xia P., Lopes A., Restivo M.T. A review of virtual reality and haptics for product assembly (part 1): rigid part. *Assembly automation*, 2013, vol. 33, no. 1, pp. 68-77, DOI: 10.1108/01445151311294784.
28. Seth A., Vance J., Oliver J. Virtual reality for assembly methods prototyping: a review. *Virtual reality*, 2011, vol. 15, no. 1, pp. 5-20, DOI: 10.1007/s10055-009-0153-y.
29. Jun Y., Liu J., Ning R., Zhang Y. Assembly process modeling for virtual assembly process planning. *International Journal of computer integrated manufacturing*, 2005, vol. 18, no. 6, pp. 442-451, DOI: 10.1080/09511920400030153.
30. Yuan X. An interactive approach of assembly planning. *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics – part a: systems and humans*, 2002, vol. 32, no. 4, pp. 522-526, DOI: 10.1109/TSMCA.2002.804822.
31. Wang L., et al. Assembly process planning and its future in collaborative manufacturing: a review. *The International journal of advanced manufacturing technology*, 2009, vol. 41, no. 1-2, pp. 132-144, DOI: 10.1007/s00170-008-1458-9.
32. Duda J. Formal Description of Integrated Process and Assembly System Planning. *Advances in Manufacturing. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham, 2018, pp. 79-89, DOI: 10.1007/978-3-319-68619-6\_8.
33. Subramani A., Dewhurst P. Automatic generation of product disassembly sequences. *CIRP Annals – Manufacturing Technology*, 1991, vol. 40, no. 1, pp. 115-118, DOI: 10.1016/s0007-8506(07)61947-7.
34. Ben-Arieh D., Kramer B. Computer-aided process planning for assembly: generation of assembly operation sequence. *International journal of production research*, 1994, vol. 32, no. 3, pp. 643-656, DOI: 10.1080/00207549408956957.
35. Homem de Mello L., Sanderson A. A basic algorithm for the generation of mechanical assembly sequences. *Computer-aided mechanical assembly planning*, 1991, vol. 148, pp. 163-190, DOI: 10.1007/978-1-4615-4038-0\_7.
36. Bozhko A. Math Modeling of Sequential Coherent and Linear Assembly Plans in CAD Systems. 2018 Global Smart Industry Conference (GloSIC). IEEE, 2018, pp. 1-5, DOI: 10.1109/GloSIC.2018.8570090.
37. Bozhko A.N. Hypergraph model for assembly sequence problem. *IOP Conference series: materials science and engineering*, 2019, vol. 560, no. 1, p. 012010, DOI: 10.1088/1757-899x/560/1/012010.

**Божко Аркадий Николаевич.** Д.т.н., профессор, кафедра «Системы автоматизированного проектирования», МГТУ им. Н.Э. Баумана, AuthorID: 705712, SPIN: 8537-0010.

**Грошев Сергей Владимирович.** Ст. преподаватель, кафедра «Системы автоматизированного проектирования», МГТУ им. Н.Э. Баумана, AuthorID: 699520, SPIN: 3783-9031.

**Кузьмина Инна Анатольевна.** К.т.н., доцент, кафедра «Системы автоматизированного проектирования», МГТУ им. Н.Э. Баумана, AuthorID: 898746, SPIN: 5270-4766.

**Родионов Сергей Владимирович.** Ст. преподаватель, кафедра «Системы автоматизированного проектирования», МГТУ им. Н.Э. Баумана, AuthorID: 797492, SPIN: 4583-2559.

---

UDC 004.94

DOI:10.25729/ESI.2025.40.4.006

## **Combinatorial model of product, based on hypergraph cutting**

**Arkadij N. Bozhko, Sergej V. Groshev, Inna A. Kuzmina, Sergej V. Rodionov**

Bauman Moscow State Technical University (National Research University),  
Russia, Moscow, s.groshev@bmstu.ru

**Abstract.** The paper proposes a new mathematical model of a combinatorial type of product. It is formed on the basis of all possible correct cuts of a hypergraph of a mechanical structure into two connected subgraphs and is represented as an AND-OR-tree. This tree describes all the connected and coordinated product fragments and the inclusion ratio of such fragments. The model can be used to synthesize various design solutions for the technical

preparation of discrete production: assembly and disassembly plans, breakdowns into assembly units, etc. AND – OR-the tree of cuts provides objective information for in-depth structural analysis of complex technical systems.

**Keywords:** assembly, computer-aided design of the assembly process, displacement planning, state space, hypergraphic model

## References

1. Ghandi S., Masehian E. Review and taxonomies of assembly and disassembly path planning problems and approaches. Computer-Aided Design, 2015, vol. 67-68, pp. 58-86. DOI: 10.1016/j.cad.2015.05.001.
2. Bozhko A.N., Rodionov S.V. Metody iskusstvennogo intellekta v avtomatizirovannom proektirovani protsessov sborki [Artificial intelligence methods in automated design of assembly processes]. Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana. Electron. zhurn. [Science and Education. Bauman Moscow State Technical University. Electronic Journal], 2016, no. 8. DOI: 10.7463/0816.0844719.
3. Rabemanantsoa M., Pierre S. An artificial intelligence approach for generating assembly sequence in CAD/CAM. Artificial Intelligence in engineering, 1996, vol. 10, no. 2, pp. 97-107, DOI: 10.1016/0954-1810(95)00018-6.
4. Meng Y., Gu T., Chang L. Reasoning about assembly sequences based on description logic and rule. Intelligent Information Processing VI, IFIP Advances in information and communication technology, 2012, vol. 385, pp. 131-136, DOI: 10.1007/978-3-642-32891-6\_18.
5. Seow K., Devanathan R. Temporal logic programming for assembly sequence planning. Artificial Intelligence in Engineering, 1993, vol. 8, no. 4, pp. 253-263, DOI: 10.1016/0954-1810(93)90008-4.
6. Jung J., Billatos S. An expert system for assembly based on axiomatic design principles. Journal of Intelligent and robotic systems, 1993, vol. 8, no. 2, pp. 245-265, DOI: 10.1007/BF01257997.
7. Hsu Y., Tai P., Wang M. A knowledge-based engineering system for assembly sequence planning. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2011, vol. 55, no. 5, pp. 763-782, DOI: 10.1007/s00170-010-3093-5.
8. Bonneville F., Perrard C., Henriod J. A genetic algorithm to generate and evaluate assembly plans. 1995 INRIA/IEEE Symposium on Emerging Technologies and Factory Automation. Proceedings. ETFA, 1995, vol. 2, pp. 231-239, DOI: 10.1109/ETFA.1995.496663.
9. Hui W., et al. Assembly planning based on semantic modeling approach. Computers in industry, 2007, vol. 58, no. 3, pp. 227-239, DOI: 10.1016/j.compind.2006.05.002.
10. Zha X., Lim S., Fok S. Integrated knowledge-based assembly sequence planning. The International Journal of advanced manufacturing technology, 1998, vol. 14, no. 1, pp. 50-64, DOI: 10.1007/BF01179417.
11. Toussaint G. Movable separability of sets. Machine intelligence and pattern recognition, 1985, vol. 2, pp. 335-375, DOI: 10.1016/B978-0-444-87806-9.50018-9.
12. Krishnan S., Sanderson A. Reasoning about geometric constraints for assembly sequence planning. 1991 IEEE International conference on robotics and automation. Proceedings, 1991, vol. 1, pp. 776-782, DOI: 10.1109/ROBOT.1991.131680.
13. Su Q. Computer aided geometric feasible assembly sequence planning and optimizing. The International Journal of advanced manufacturing technology, 2007, vol. 33, no. 1, pp. 48-57, DOI: 10.1007/s00170-006-0658-4.
14. Woo T., Dutta D. Automatic disassembly and total ordering in three dimension. Journal of engineering for industry, 1991, vol. 113, no. 2, pp. 207-213, DOI: 10.1115/1.2899679.
15. Wan W., Harada K., Nagata K. Assembly sequence planning for motion planning. Assembly automation, 2018, vol. 38, no. 2, pp. 195-206, DOI: 10.1108/AA-01-2017-009.
16. Chang H., Li T.Y. Assembly maintainability study with motion planning. Proceedings of 1995 IEEE International conference on robotics and automation, 1995, vol. 1, pp. 1012-1019, DOI: 10.1109/ROBOT.1995.525415.
17. Morato C., Kaipa K.N., Gupta S.K. Improving assembly precedence constraint generation by utilizing motion planning and part interaction clusters. Computer-aided design, 2013, vol. 45, no. 11, pp. 1349-1364, DOI: 10.1016/j.cad.2013.06.005.
18. Sundaram S., Remmler I., Amato N.M. Disassembly sequencing using a motion planning approach. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International conference on robotics and automation (Cat. No.01CH37164), 2001, vol. 2, pp. 1475-1480, DOI: 10.1109/ROBOT.2001.932818.
19. Wan W., Harada K., Nagata K. Assembly sequence planning for motion planning. Assembly Automation, 2018, vol. 38, no. 2, pp. 195-206, DOI: 10.1108/AA-01-2017-009.
20. Mohd Fadzil F., Ab Rashid F. A Hybrid Ant-wolf algorithm to optimize assembly sequence planning problem. Assembly Automation, 2017, vol. 37, no. 2, DOI: 10.1108/AA-11-2016-143.
21. Lu C., Fuh J., Wong Y. Advanced assembly planning approach using a multi-objective genetic algorithm. Collaborative product assembly design and assembly planning, 2011, pp. 107-146, DOI: 10.1533/9780857093882.107.

22. Bahubalendruni R., Biswal B., Deepak B. Optimal robotic assembly sequence generation using particle swarm optimization. *Journal of automation and control engineering*, 2016, vol. 4, no. 2, pp. 89-95, DOI: 10.12720/joace.4.2.89-95.
23. Bourjault A. Methodology of Assembly Automation: A New Approach. *Robotics and Factories of the Future '87*, 1988, pp. 37-45, DOI: 10.1007/978-3-642-73890-6\_6.
24. De Fazio T., Whitney D. Simplified generation of all mechanical assembly sequences. *IEEE Journal on robotics and automation*, 1987, vol. 3, no. 6, pp. 640-658, DOI: 10.1109/JRA.1987.1087132.
25. Baldwin D., et al. An integrated computer aid for generating and evaluating assembly sequences for mechanical products. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 1991, vol. 7, no. 1, pp. 78-94, DOI: 10.1109/70.68072.
26. Wilson R. Minimizing user queries in interactive assembly planning. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 1995, vol. 11, no. 2, pp. 308-312, DOI: 10.1109/70.370514.
27. Xia P., Lopes A., Restivo M.T. A review of virtual reality and haptics for product assembly (part 1): rigid part. *Assembly automation*, 2013, vol. 33, no. 1, pp. 68-77, DOI: 10.1108/01445151311294784.
28. Seth A., Vance J., Oliver J. Virtual reality for assembly methods prototyping: a review. *Virtual reality*, 2011, vol. 15, no. 1, pp. 5-20, DOI: 10.1007/s10055-009-0153-y.
29. Jun Y., Liu J., Ning R., Zhang Y. Assembly process modeling for virtual assembly process planning. *International Journal of computer integrated manufacturing*, 2005, vol. 18, no. 6, pp. 442-451, DOI: 10.1080/09511920400030153.
30. Yuan X. An interactive approach of assembly planning. *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics – part a: systems and humans*, 2002, vol. 32, no. 4, pp. 522-526, DOI: 10.1109/TSMCA.2002.804822.
31. Wang L., et al. Assembly process planning and its future in collaborative manufacturing: a review. *The International journal of advanced manufacturing technology*, 2009, vol. 41, no. 1-2, pp. 132-144, DOI: 10.1007/s00170-008-1458-9.
32. Duda J. Formal Description of Integrated Process and Assembly System Planning. *Advances in Manufacturing. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham, 2018, pp. 79-89, DOI: 10.1007/978-3-319-68619-6\_8.
33. Subramani A., Dewhurst P. Automatic generation of product disassembly sequences. *CIRP Annals – Manufacturing Technology*, 1991, vol. 40, no. 1, pp. 115-118, DOI: 10.1016/s0007-8506(07)61947-7.
34. Ben-Arieh D., Kramer B. Computer-aided process planning for assembly: generation of assembly operation sequence. *International journal of production research*, 1994, vol. 32, no. 3, pp. 643-656, DOI: 10.1080/00207549408956957.
35. Homem de Mello L., Sanderson A. A basic algorithm for the generation of mechanical assembly sequences. *Computer-aided mechanical assembly planning*, 1991, vol. 148, pp. 163-190, DOI: 10.1007/978-1-4615-4038-0\_7.
36. Bozhko A. Math Modeling of Sequential Coherent and Linear Assembly Plans in CAD Systems. *2018 Global Smart Industry Conference (GloSIC)*. IEEE, 2018, pp. 1-5, DOI: 10.1109/GloSIC.2018.8570090.
37. Bozhko A.N. Hypergraph model for assembly sequence problem. *IOP Conference series: materials science and engineering*, 2019, vol. 560, no. 1, p. 012010, DOI: 10.1088/1757-899x/560/1/012010.

*Arkady Nikolaevich Bozhko. Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Computer-Aided Design Systems, Bauman Moscow State Technical University, AuthorID: 705712, SPIN: 8537-0010.*

*Sergey Vladimirovich Groshev. Senior lecturer, Department of Computer-aided Design Systems, Bauman Moscow State Technical University, AuthorID: 699520, SPIN: 3783-9031.*

*Inna Anatolyevna Kuzmina. PhD, Associate Professor, Department of Computer-Aided Design Systems, Bauman Moscow State Technical University, AuthorID: 898746, SPIN: 5270-4766.*

*Sergey Vladimirovich Rodionov. Senior Lecturer, Department of Computer-Aided Design Systems, Bauman Moscow State Technical University, AuthorID: 797492, SPIN: 4583-2559.*

*Статья поступила в редакцию 23.06.2025; одобрена после рецензирования 14.10.2025; принята к публикации 09.11.2025.*

*The article was submitted 06/23/2025; approved after reviewing 10/14/2025; accepted for publication 11/09/2025.*