

УДК 519.6+517.9

DOI:10.25729/ESI.2023.32.4.008

## Идентификация внутреннего теплового источника и определение теплового состояния объекта по динамическим граничным измерениям

Япарова Наталья Михайловна, Капелюшин Юрий Евгеньевич

Южно-Уральский государственный университет (НИУ),

Россия, Челябинск, *iaparovann@susu.ru*

**Аннотация.** В статье рассмотрена задача идентификации внутреннего теплового источника и оценки его влияния на изменения температуры контролируемого объекта. Проблема идентификации теплового источника возникает при тепловом контроле передачи электроэнергии, при термообработке, при неразрушающем контроле зданий, конструкций и материалов. Математическая модель теплопереноса внутри объекта представлена уравнением теплопроводности с неизвестной функцией источника, начальными условиями, а также граничными условиями, сформированными на основе результатов зашумленных температурных измерений, полученных вблизи поверхности объекта. В статье предложен подход к идентификации внутреннего теплового источника, основанный на переходе от обратной задачи к интегральному уравнению, численный метод его решения, а также алгоритм расчета нестационарных внутренних тепловых полей, учитывающий влияние теплового источника. Устойчивость метода идентификации относительно погрешности исходных данных обеспечивается выбором параметров регуляризации. Предложенные подход и методы, в отличие от существующих, позволяют установить явную зависимость искомой функции внутреннего теплового источника от граничных измерений в ситуации, когда температурные поля вблизи поверхности объекта изменяются относительно времени. В статье приведены оценки погрешности численных решений, найденные в результате сравнительного анализа с тестовыми значениями. Результаты эксперимента свидетельствуют о том, что предложенные методы снижают негативное влияние шума на точность обработки данных и позволяют определять внутреннее тепловое состояние объекта из косвенных измерений с достаточным уровнем точности и могут служить основой для определения влияния внутреннего теплового источника на формирование внутренних нестационарных температурных полей.

**Ключевые слова:** теплоперенос, технические системы, метод обработки информации, обратная задача, интегральное уравнение, численный метод, регуляризация

**Цитирование:** Япарова Н.М. Идентификация внутреннего теплового источника и определение теплового состояния объекта по динамическим граничным измерениям / Н.М. Япарова, Ю.Е. Капелюшин // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2023. – № 4(32). – С. 91-103. – DOI:10.25729/ESI.2023.32.4.008.

**Введение.** Требования к повышению эффективности производства и обеспечению эксплуатационной безопасности технических систем в металлургии, машиностроении и химической промышленности неразрывно связаны с высокоточным регулированием режима теплового воздействия, основанном на поступающей информации о тепловом состоянии контролируемого технического объекта. Существенным фактором, влияющим на тепловое состояние объекта, является наличие скрытого внутреннего источника тепла, появление которого связано с остаточными тепловыми процессами, происходящими внутри тела. Источником информации для идентификации внутреннего теплового источника служат результаты температурных измерений, выполненные вблизи поверхности контролируемого объекта. Задача идентификации источника, в которой внутренний источник тепла определяется по косвенным измерениям на поверхности, относится к классу обратных задач. Специфика обратных задач заключается в том, что для их решения необходимо использовать регуляризирующие алгоритмы, обеспечивающие устойчивость результатов относительно шума исходных данных и контролируемость уровня погрешности найденных решений.

Разработка и совершенствование регуляризирующих алгоритмов для решения обратных задач, связанных с реальной практикой, вызывает большой интерес у исследователей. Среди работ, посвященных этой тематике, отметим работу Вабищевича П.Н. [1] по исследованию

алгоритмов временного разделения для многомасштабных задач, Васильева В.И. [2], в которой рассмотрены задачи теплообмена с фазовым переходом, работу Лукьяненко Д.В., Борзунова А.А. и Шишленина М.А. [3], предложивших подход к решению коэффициентных обратных задач для нелинейных уравнений массопереноса. В качестве исследований, связанных с применением обратных задач на практике, отметим работы Короткого А.И. [4], Дилигенской А.Н. [5] и других исследователей [6-8]. В последние десятилетия идентификация внутреннего источника тепла в различных объектах относится к интенсивно развивающейся области исследований. Среди работ, посвященных разработке методов идентификации источника тепла, следует выделить работы E. Bazhlekova [9], S. Slimani [10], M. Rostamian [11]. В отношении применения теоретических результатов на практике упомянем работы D. Lesnic [12], Zou [13] и других исследователей [14-16].

В статье рассмотрена проблема идентификации неизвестного внутреннего теплового источника и последующего определения внутренних нестационарных температурных полей по результатам температурных измерений, выполненных вблизи поверхности объекта. Построено интегральное уравнение, связывающее функцию источника и граничные температурные измерения. Предложен регуляризирующий алгоритм расчета теплового источника, основанный на численном решении интегрального уравнения. Вычислительная схема базируется на использовании конечных интегральных сумм и многопараметрической регуляризации, обеспечивающей устойчивость вычислительной процедуры относительно погрешности исходных данных. Эффективность предложенного метода подтверждается результатами вычислительного эксперимента.

**Постановка задачи.** Проблема идентификации внутреннего теплового источника возникает при комплексной тепловой обработке, когда внутри технологического объекта могли сохраниться включения, отличающиеся по физическим характеристикам от общей структуры объекта и являющиеся внутренними источниками выделения или поглощения тепловой энергии. К таким включениям относятся пустоты, неоднородные включения, перегретые или непрогретые участки внутри тела. Появление внутренних источников возможно также в электропроводящих сетях, когда причиной возникновения источника являются изменения, связанные со старением проводки, ее повреждением, и другими негативными факторами. Внутренний источник тепла генерирует или поглощает тепло, а устранение его влияния требует дополнительных затрат, связанных либо с корректировкой параметров рабочего режима, либо с изменением параметров внешнего теплового воздействия. Таким образом, точность контроля теплового состояния объекта обеспечивается созданием качественных методов обработки температурных измерений, учитывающих влияние возможного теплового источника на формирование внутренних нестационарных температурных полей.

В статье рассмотрена проблема выявления и оценки влияния внутреннего теплового источника на тепловое состояние технического объекта. Основные предпосылки математической модели теплопереноса заключаются в следующем. К начальному моменту времени температурные поля одинаковы в каждой точке объекта. Поверхность объекта состоит из нескольких непересекающихся частей, одна из которых подвергается тепловому воздействию, одинаковому в каждой точке нагреваемой поверхности. К таким объектам относятся линейные токопроводящие системы, нагрев в которых происходит под действием электрического тока, кольцевые цилиндры, внутренняя поверхность которых подвергается термообработке, стенки термических печей, кристаллизаторов и других технических сооружений. Измерения температуры осуществляются на поверхности объекта. В случае линейных токопроводящих систем измерения происходят в контрольных точках. Интенсивность и продолжительность теплового воздействия такова, что значения тепловых

характеристик материала: удельная теплоемкость, теплопроводность и плотность материала остаются практически неизменными, а на поверхности тела исключаются резкие изменения температурных градиентов. В ситуации, когда внутренний источник тепла отсутствует, реализация выбранного режима теплового воздействия приводит к формированию определенного температурного поля на других участках поверхности. При наличии же внутреннего теплового источника появляются отклонения измеряемых в этой части температур от ожидаемых значений. В этой ситуации необходимо определить уровень влияния неизвестного внутреннего источника тепла на температурные поля и спрогнозировать тепловое состояние объекта с учетом найденного влияния внутреннего теплового источника.

Математическая модель теплопереноса с неизвестным внутренним источником тепла представлена следующим образом. Пусть  $t$  – текущий момент времени,  $L$  – расстояние от участка поверхности, подвергаемой тепловому воздействию до точки, в которой проводятся контрольные температурные измерения,  $x$  – расстояние от участка, подвергаемого тепловому воздействию, до текущей внутренней точки объекта,  $x \in [0, L]$ . Функция  $u(x, t)$  соответствует температуре текущей внутренней точки  $x$  в текущий момент времени  $t$ . Математическая модель теплопереноса включает уравнение теплопроводности

$$u_t = au_{xx} + f(t), \quad x \in (0, L), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $f(t)$  – неизвестная функция теплового источника, отражающая влияние внутреннего теплового источника на температурные поля. Тепловому состоянию объекта в начальный момент времени соответствуют начальное условие:

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (2)$$

Значениям температур, измеренных на поверхности, подвергаемой непосредственному тепловому воздействию, соответствует граничное условие:

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Значения температур, измеренные на другом участке поверхности, служат основой для формирования граничной функции  $u(L, t)$ , представленной в математической модели граничным условием:

$$u(L, t) = \psi(t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Основываясь на информации об интенсивности внешнего теплового воздействия и принимая во внимание теплообмен вблизи границ объекта, получаем следующее дополнительное условие в некоторой точке  $x_0$ , расположенной в окрестности граничной точки  $x = 0$ :

$$u(x_0, t) = g(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где функция  $g(t)$  сформирована из расчета плотности граничных тепловых потоков.

Основываясь на требованиях к интенсивности внешнего теплового воздействия, полагаем, что имеют место следующие условия  $\varphi(t), \psi(t) \in C^{1+\eta}[0, T]$  для любого  $T > 0$  при  $\eta \in (0, 1)$  и существуют константы  $S_\varphi, S_\psi, \beta_\varphi, \beta_\psi > 0$  такие, что

$$|\varphi(t)| \leq S_\varphi e^{\beta_\varphi t} \text{ и } |\psi(t)| \leq S_\psi e^{\beta_\psi t} \text{ при всех } t \in [0, T] \text{ для любого } T > 0.$$

Также существуют  $S > 0$  и  $\beta > 0$  такие, что имеет место  $|u(x, t)| \leq Se^{\beta t}$  при всех  $x \in [0, L]$  и  $t \in [0, T]$  для любого  $T > 0$ . Кроме того, функции  $\varphi(t), \psi(t), g(t)$  и  $u(x, t)$  удовлетворяют условиям Дирихле в соответствующей области.

Задача определения влияния неизвестного внутреннего теплового источника заключается в отыскании функции  $f(t)$  из соотношений (1) – (5).

При решении этой задачи необходимо учитывать, что результаты температурных измерений неизбежно содержат погрешности, уровень которых не превосходит некоторой величины  $\delta > 0$ , определяемой точностью средства измерения. В математической модели

присутствие погрешностей представлено следующим образом. Вместо действительных значений  $\varphi(t), \psi(t), g(t)$  известны измеренные значения  $\varphi_\delta(t), \psi_\delta(t), g_\delta(t)$  и уровень  $\delta$  такие, что при любом  $T > 0$  имеет место условие:

$$\max \left\{ \max_{t \in [0, T]} |\varphi(t) - \varphi_\delta(t)|, \max_{t \in [0, T]} |\psi(t) - \psi_\delta(t)|, \max_{t \in [0, T]} |g(t) - g_\delta(t)| \right\} \leq \delta.$$

Таким образом, в задаче (1) - (5) требуется, используя зашумленные исходные данные  $\varphi_\delta(t), \psi_\delta(t), g_\delta(t)$ , найти функцию  $f_\delta(t)$ , а затем рассчитать нестационарные температурные поля  $u_\delta(x, t)$  в каждой внутренней точке  $x \in (0, L)$  при всех  $t \in (0, T)$  для любого  $T > 0$ .

Задача идентификации функции источника (1) - (5) относится к классу обратных задач и для построения методов идентификации внутреннего теплового источника, устойчивого относительно погрешности исходных данных, и позволяющих получать температурные значения с требуемым уровнем точности, необходимо разрабатывать алгоритмы, основанные на регуляризирующих подходах.

**Построение интегрального уравнения идентификации.** Построение метода идентификации функции источника  $f_\delta(t)$  базируется на обобщении результатов, представленных в [16, 17]. Следуя основным идеям, изложенным в этих работах, разработка метода идентификации функции источника разделяется на два этапа. На первом этапе осуществляется переход от исходной задачи к интегральному уравнению идентификации, устанавливающему явную зависимость искомой функции от исходных данных. Следующий этап связан с разработкой регуляризованного алгоритма идентификации функции источника из полученного интегрального уравнения. Построение интегрального уравнения идентификации основывается на аналитическом решении следующей прямой задачи:

$$u_t = au_{xx} + f(t), \quad x \in (0, L), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L], \quad (7)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(L, t) = \psi(t), \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Основываясь на свойствах функций  $\varphi(t), \psi(t)$  и  $u(x, t)$  применим для решения задачи (6) - (8) прямое преобразование Лапласа по переменной  $t$ . Пусть  $\bar{u}(x, p)$  – изображение функции  $u(x, t)$ , а  $\bar{\varphi}(p), \bar{\psi}(p), \bar{f}(p)$  – изображения функций  $\varphi(t), \psi(t)$  и  $f(t)$  соответственно. Тогда прямая задача (6) - (8) в изображениях Лапласа имеет вид:

$$d^2 \bar{u} - \frac{p}{a} \bar{u} = -\frac{\bar{f}}{a},$$

$$\bar{u}(0) = \bar{\varphi}, \quad \bar{u}(L) = \bar{\psi}.$$

Аналитическое решение этой задачи имеет вид:

$$\bar{u}(x, p) = \frac{\bar{f}(p)}{p} + \left( \bar{\varphi}(p) - \frac{\bar{f}(p)}{p} \right) \frac{\text{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(L-x)\right)}{\text{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}L} + \left( \bar{\psi}(p) - \frac{\bar{f}(p)}{p} \right) \frac{\text{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{\text{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}L}, \quad (9)$$

Так как  $\frac{\text{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(L-x)\right)}{\text{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}L}$  и  $\frac{\text{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{\text{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}L}$  имеют простые полюса в точках  $\sqrt{\frac{p}{a}}L = \pm i\pi n$ , а точка  $p = 0$

является регулярной точкой функции  $\frac{\text{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{\text{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}L}$ , то эти функции являются мероморфными.

Учитывая это свойство и принимая во внимание ограниченность этих функций на каждом замкнутом контуре, применим теорему Миттаг-Леффлера и теорему Коши [18], тогда получаем:

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(L-x)\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}L} = \frac{L-x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n(L-x)}{L}\right) \frac{p}{p + \frac{a\pi^2 n^2}{L^2}},$$

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}L} = \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) \frac{p}{p + \frac{a\pi^2 n^2}{L^2}}.$$

Подставим последние соотношения в (9). Принимая во внимание сходимость рядов в этих соотношениях и опираясь на свойства сходящихся рядов, после приведения подобных слагаемых получаем, что изображение решения  $\bar{u}(x, p)$  прямой задачи (6) - (8) при  $x \in (0, L)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, p) = & \bar{f}(p) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right) \frac{1}{p + \frac{a\pi^2(2n-1)^2}{L^2}} + \\ & + \bar{\varphi}(p) \left( \frac{L-x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n(L-x)}{L}\right) \frac{p}{p + \frac{a\pi^2 n^2}{L^2}} \right) + \\ & + \bar{\psi}(p) \left( \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) \frac{p}{p + \frac{a\pi^2 n^2}{L^2}} \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание свойства функций  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  и  $u(x, t)$ , далее применим обратное преобразование Лапласа для  $\bar{u}(x, p)$ , а затем используем теорему о свертке. Получим, что решение  $u(x, t)$  прямой задачи (6) - (8) имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{L^2} t} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau + \\ & + \left( \varphi(t) \frac{L-x}{L} + \psi(t) \frac{x}{L} \right) + \\ & + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n(L-x)}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau + \\ & + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя соотношение (5) в (10), принимая во внимание то, что вместо точных значений  $g(t)$  известны значения  $g_\delta(t)$ , после соответствующих преобразований, получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x_0}{L}\right) \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{L^2} (t-\tau)} d\tau \\ & = g_\delta(t) - \left( \varphi(t) \frac{L-x_0}{L} + \psi(t) \frac{x_0}{L} \right) + \\ & + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi n(L-x_0)}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \int_0^t \varphi_\delta(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau - \\ & + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi nx_0}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \int_0^t \psi_\delta(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Принимая во внимание специфику сходимости рядов, стоящих в правой части последнего уравнения, применим регуляризирующий подход для раскрытия оператора дифференцирования. Суть регуляризации заключается в следующем. Обобщая результаты, представленные в работах [16, 17] и следуя идее, приведенной в [19], сначала аппроксимируем все ряды, входящие в уравнение конечными суммами, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x_0}{L}\right) \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{L^2}(t-\tau)} d\tau \\ & = g_\delta(t) - \left( \varphi(t) \frac{L-x_0}{L} + \psi(t) \frac{x_0}{L} \right) + \\ & + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^M \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi n(L-x_0)}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \int_0^t \varphi_\delta(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau - \\ & + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^H \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi n x_0}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \int_0^t \psi_\delta(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Далее в конечных рядах раскрываем оператор дифференцирования, получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x_0}{L}\right) \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{L^2}(t-\tau)} d\tau = \\ & = g_\delta(t) + \frac{2\pi a}{L^2} \sum_{n=1}^M n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{L}\right) \int_0^t \varphi_\delta(\tau) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2}(t-\tau)} d\tau + \\ & + \frac{2\pi a}{L^2} \sum_{n=1}^H (-1)^n n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{L}\right) \int_0^t \psi_\delta(\tau) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2}(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Основываясь на свойствах конечных рядов, преобразовав (11), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x_0}{L}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{L^2}(t-\tau)} f(\tau) d\tau = \\ & = g_\delta(t) + \int_0^t \frac{2\pi a}{L^2} \sum_{n=1}^M n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2}(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^t \frac{2\pi a}{L^2} \sum_{n=1}^H (-1)^n n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2}(t-\tau)} \psi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} K_N(t, \tau) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x_0}{L}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{L^2}(t-\tau)}, \\ \Phi_{M\delta}(t) &= \int_0^t \frac{2\pi a}{L^2} \sum_{n=1}^M n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2}(t-\tau)} \varphi_\delta(\tau) d\tau, \\ \Psi_{H\delta}(t) &= \int_0^t \frac{2\pi a}{L^2} \sum_{n=1}^H (-1)^n n \sin\left(\frac{\pi n x_0}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2}(t-\tau)} \psi_\delta(\tau) d\tau / \end{aligned}$$

Тогда уравнение (10) примет вид:

$$\int_0^t K_N(t - \tau)f(\tau)d\tau = g_\delta(t) + \Phi_{M\delta}(t) + \Psi_{H\delta}(t). \quad (12)$$

Уравнение (11) устанавливает явную зависимость неизвестной функции источника  $f(t)$  от зашумленных исходных данных. Таким образом, исходная обратная задача (1) - (5) сведена к интегральному уравнению идентификации, для которого необходимо разработать численный метод, позволяющий определять неизвестную функцию  $f_\delta(t)$  по зашумленным исходным данным.

Метод идентификации функции источника и определение температурных полей во внутренних точках объекта. Определения влияния внутреннего источника на тепловое состояние объекта осуществляется в два этапа. На первом этапе происходит идентификация функции источника  $f(t)$  из уравнения (12). Это уравнение является уравнением Вольтерра первого рода, относится к классу обратных задач и для численного решения этого уравнения необходимо разработать вычислительную схему, основанную на регуляризирующем алгоритме. Основная идея регуляризации заключается в том, что приближенное решение  $f_\delta(t)$  уравнения (11) находят из уравнения:

$$\int_0^t K_N(t - \tau)f(\tau)d\tau + \alpha f(t) = g_\delta(t) + \Phi_{M\delta}(t) + \Psi_{H\delta}(t),$$

а настраиваемыми параметрами регуляризации являются не только  $\alpha$ , но и количества слагаемых в ядре  $K_N(t, \tau)$  и в интегралах  $\Phi_{M\delta}(t)$  и  $\Psi_{H\delta}(t)$ . Для выбора значений параметров регуляризации  $\alpha, N, M, H$  и оценки погрешности численного решения  $f_\delta(t)$  уравнения (12) введем в рассмотрение функцию:

$$\Delta_\delta(t) = \left\| \int_0^t K_N(t - \tau)f_\delta(\tau)d\tau - (g_\delta(t) + \Phi_{M\delta}(t) + \Psi_{H\delta}(t)) \right\|$$

В предлагаемом методе значения параметров регуляризации  $\alpha, N, M, H$  выбираются так, чтобы значения функции погрешности  $\Delta_\delta(t)$  находились в допустимых пределах.

Для численной реализации метода интегралы в уравнении заменялись конечными суммами по схеме прямоугольников. Шаг дискретизации определяется временным интервалом между измерениями в граничной точке. Введение в вычислительную схему с априорно заданным шагом дискретизации стабилизирующего функционала с параметром  $\alpha$  обеспечивает устойчивость вычислительной схемы относительно шума в исходных данных.

Отметим, что в ситуации, когда характеристики средств измерения допускают изменения временного интервала между измерениями, то для численного решения уравнения (12) возможна разработка метода, обладающего свойством саморегуляризации. Подобные методы применяются для решения различного рода задач [6].

Второй этап включает непосредственный расчет внутренних нестационарных температурных полей. Для этого переходят к решению прямой задачи (6) - (8), подставив в уравнение теплопроводности найденную функцию источника, а для численной реализации метода используют конечно-разностные схемы.

Верификация предложенного метода и оценка точности информации о внутреннем тепловом состоянии объекта осуществлялась посредством вычислительного эксперимента.

**Результаты экспериментальных исследований.** Основная цель эксперимента заключалась в оценке точности метода идентификации внутреннего источника и определения внутренних нестационарных температурных полей. Оценка точности проводилась на основе сравнительного анализа численных решений с тестовыми значениями, сформированными на основе имитационного моделирования. Для формирования тестовых значений внутренних температурных полей  $u(x, t)$  использовали конечно-разностный аналог прямой задачи (6) -

(8). В эксперименте рассматривались различные ситуации, связанные с влиянием внутреннего теплового источника:

- Тест 1. Увеличение влияния внутреннего источника. Такая ситуация вызвана, например, процессами старения или нарушением структуры теплоизолирующих материалов в токопроводящих системах. В эксперименте эта ситуация представлена возрастающими тестовыми функциями  $f(t)$ .
- Тест 2. Уменьшение влияния внутреннего источника. С этим эффектом неразрывно связана первичная термообработка металлоизделий, основной целью которой является выравнивание структуры и устранение дефектов материала. В эксперименте такие ситуации представлены убывающими тестовыми функциями  $f(t)$ .

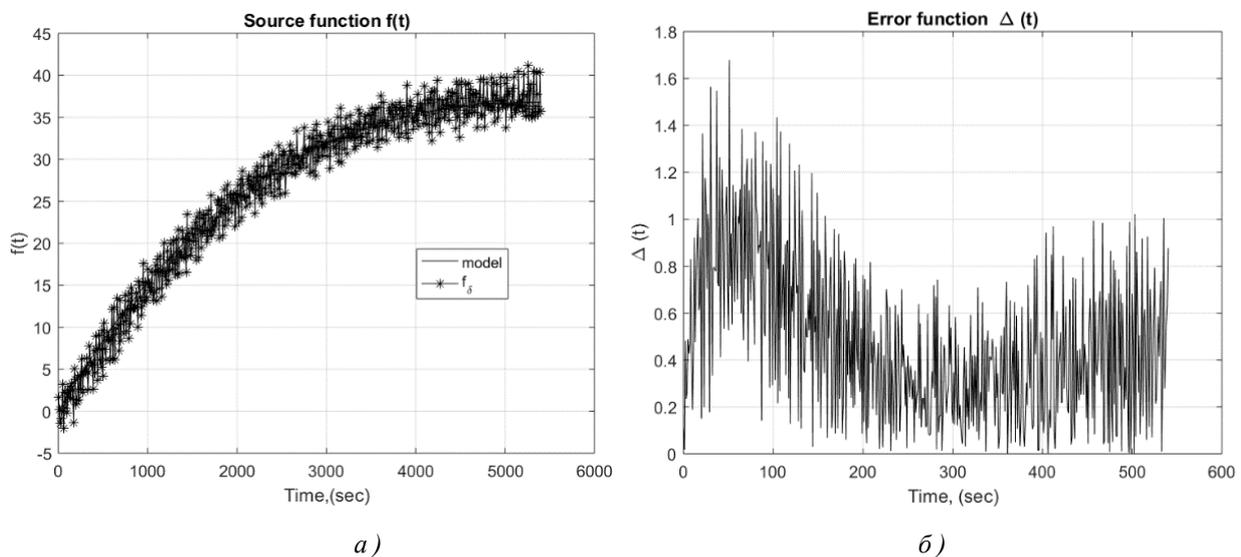
После идентификации функции источника вычисляли температурные значения  $u_\delta(x, t)$ , подставляя найденную функцию источника  $f_\delta(t)$  в конечно-разностный аналог прямой задачи (6) - (8). Для оценки отклонений вычисленной функции источника  $f_\delta(t)$  от тестовых значений  $f(t)$  используем функцию  $\Delta(t)$  и величины  $\Delta_f$  и  $\vartheta_f$ :

$$\Delta(t) = |f_\delta(t) - f(t)|, \quad \Delta_f = \max_{t \in [0, T]} \Delta(t), \quad \vartheta_f = \frac{\Delta_f}{\max_{t \in [0, T]} |f(t)|}$$

Далее оценивали отклонение функции  $u_\delta(x, t)$  от тестовых значений  $u(x, t)$  с помощью величин  $\Delta_u$  и  $\vartheta_u$ , определяемых формулами:

$$\Delta_u = \max_{(x,t) \in [0, L] \times [0, T]} |u_\delta(x, t) - u(x, t)|, \quad \vartheta_u = \frac{\Delta_u}{\max_{(x,t) \in [0, L] \times [0, T]} |u(x, t)|}$$

Результаты эксперимента при уровне шума  $\delta = 0,05$  проиллюстрированы рис.1 - рис.6. Результаты эксперимента, связанного с увеличением влияния внутреннего теплового источника, представлены на рис.1 - рис.3. Результаты, связанные с уменьшением его влияния, приведены на рис.4 - рис.6.



**Рис. 1.** Результаты идентификации функции источника (Тест 1). (а) Графики функции источника:  $f_\delta$ —функция источника  $f_\delta(t)$  ; model - тестовая функция  $f(t)$ ; (б). График функции  $\Delta(t)$

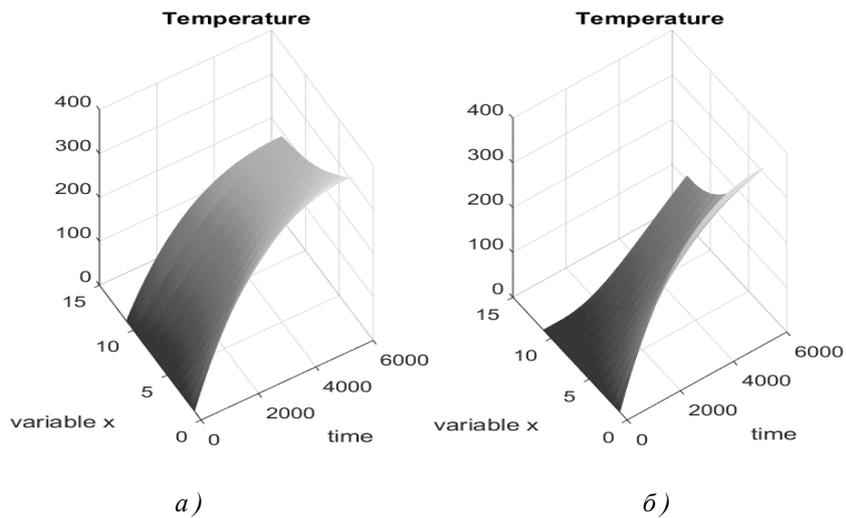


Рис. 2. Температурные поля в объекте (Тест 1).

(а) – температурные поля  $u_0(x, t)$ , формируемые в объекте, не содержащем внутреннего теплового источника; (б) – температурные поля  $u_\delta(x, t)$ , сформированные под влиянием внутреннего теплового источника

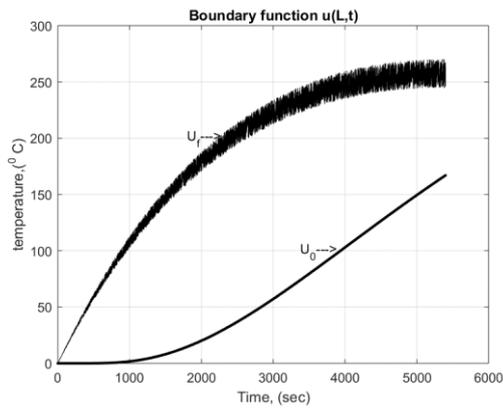


Рис. 3. Графики температур в точке  $x = L$  (Тест1).  $U_0$  – температурное поле, получаемое при отсутствии внутреннего теплового источника,  $U_f$  – температурное поле, формируемое под влиянием внутреннего теплового источника

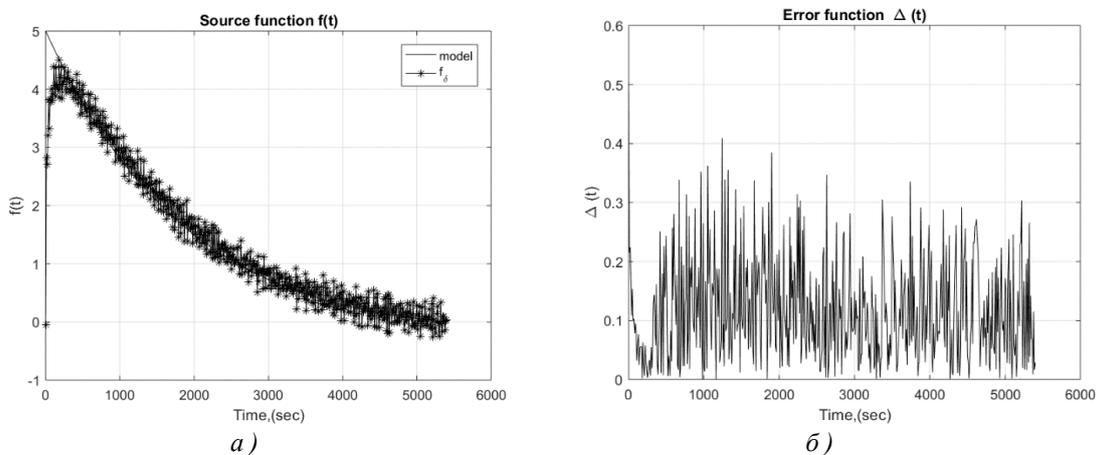
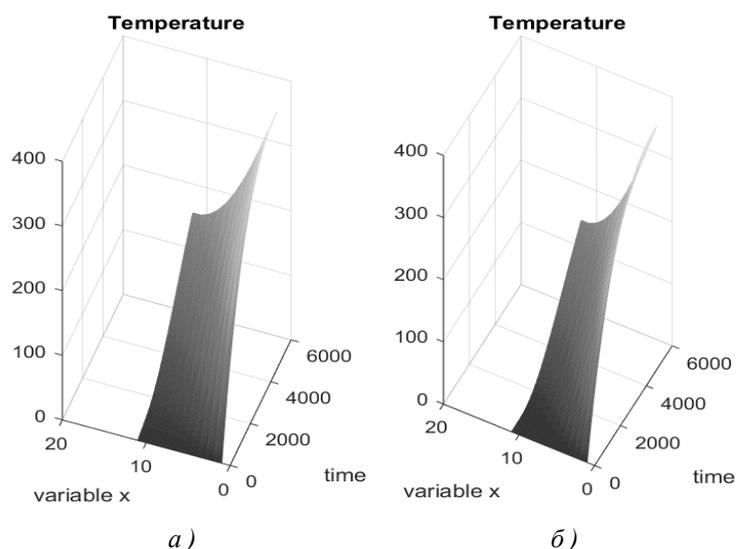
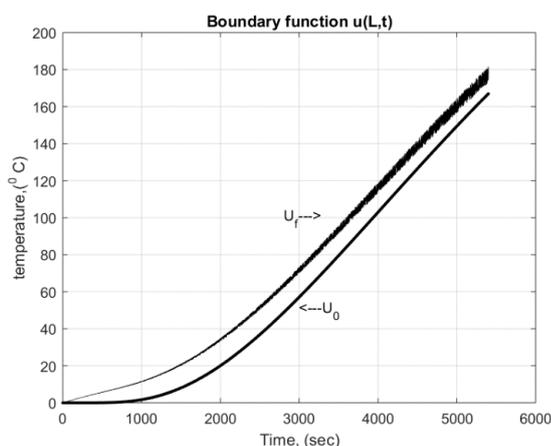


Рис. 4. Результаты идентификации функции источника (Тест 2). (а) Графики функции источника:  $f_\delta$  – функция источника  $f_\delta(t)$ ; model – тестовая функция  $f(t)$ ; (б). График функции  $\Delta(t)$



**Рис. 5.** Температурные поля в объекте (Тест 2). (а) – температурное поле  $u_0(x, t)$ , формируемые в объекте, не содержащем теплового источника; (б) – температурное поле  $u_\delta(x, t)$  сформированное под влиянием внутреннего теплового источника



**Рис. 6.** Графики температур в точке  $x = L$  (Тест 2).  $U_0$  - температурное поле, получаемое при отсутствии внутреннего теплового источника,  $U_f$  - температурное поле, формируемое под влиянием внутреннего теплового источника

Результаты сравнительного анализа при различных уровнях шума исходных данных приведены в таблице 1.

**Таблица 1.** Оценки погрешностей тепловых функций

Тестовые функции	Уровень шума $\delta$	$\Delta_f$	$\vartheta_f$	$\Delta_u$	$\vartheta_u$
<b>Тест 1</b>	0,03	1,5045	0,0231	3,4047	0,0258
	0,05	1,6742	0,0242	3,4499	0,0271
	0,1	1,9359	0,0251	3,4863	0,0281
<b>Тест 2</b>	0,03	0,8130	0,0274	2,3180	0,0434
	0,05	0,8221	0,0289	2,6421	0,0489
	0,1	0,8508	0,0204	2,7308	0,0514

Результаты эксперимента свидетельствуют о принципиальной возможности идентификации внутреннего источника с помощью предложенного подхода в условиях проведения динамических измерений, а также об устойчивости и достаточной точности метода идентификации источника и определения нестационарных внутренних температурных полей относительно шума исходных данных.

**Заключение.** В статье предложены интегральная модель и метод идентификации внутреннего теплового источника по результатам граничных измерений. Интегральная модель, полученная на основе преобразований Лапласа и регуляризирующих подходов, устанавливает прямую зависимость неизвестной функции источника от исходных данных, формируемых из результатов граничных температурных измерений. В работе предложен численный метод решения интегрального уравнения, основанный на регуляризирующем подходе, обеспечивающем уменьшение влияния шумов на устойчивость и точность результатов идентификации внутреннего теплового источника, а также алгоритм определения теплового состояния объекта. Надёжность метода идентификации и достоверность получаемой информации о тепловом состоянии объекта подтверждается результатами эксперимента.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание №FENU-2021-0014).

#### Список источников

1. Efendiev Y., Pun S.M., Vabishchevich P.N. Temporal splitting algorithms for non-stationary multiscale problems. *Journal of Computational Physics*, 2021, vol. 439, iss. 1, 110375.
2. Vasyliiev V., Vasilyeva M., An accurate approximation of the two-phase stefan problem with coefficient smoothing. *Mathematics*, 2020, vol. 8, iss. 11, 19224.
3. Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., and Shishlenin M.A. Solving coefficient inverse problems for nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 727-737.
4. Korotkii A.I. and Starodubtseva Y.V. Direct and inverse boundary value problems for models of stationary reaction–convection–diffusion. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, pp. 96-112.
5. Дилигенская А.Н. Решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности на основе параметрической оптимизации / А.Н. Дилигенская // *Теплофизика высоких температур*, 2018. – Т. 56. – № 3. – С. 399-406.
6. Procudina L.A., Yaparov D. Numerical modeling of the mass of the flowing liquid at transverse oscillations of the straight tube. *AIP conference proceedings application of mathematics in technical and natural sciences: 11th international conference for promoting the application of mathematics in technical and natural sciences*, 2019, 2164 – 120011.
7. Franco D., Infante G., Minhos F.M. Nonlocal boundary value problems. *Boundary value problems*, 2012.
8. Yaparova N. Mathematical modelling and method for solving a parametric identification problem for self-test of measuring devices. *Inverse problems in science and engineering*, 2016, vol. 24, iss. 1, pp. 77-91.
9. Bazhlekova E., Bazhlekov I. Identification of a space-dependent source term in a nonlocal problem for the general time-fractional diffusion equation. *Journal of computational and applied mathematics*, 2021, vol. 384, 113213.
10. Slimani S., Medarhi I., Najib K., Zine A. Identification of the source function for a seawater intrusion problem in unconfined aquifer. *Numerical algorithms*, 2020, vol. 84, iss. 4, pp. 1565-1587.
11. Rostamian M., Shahrezaee A. A meshless method for solving 1D time-dependent heat source problem. *Inverse problems in science and engineering*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 51-81.
12. Ismailov M.I., Kanca F., Lesnic D. Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions. *Applied mathematics and computation*, 2011, vol. 218, pp. 4138-4146.
13. Zhou G., Wu B. Identifying a time-dependent heat source with nonlocal boundary and overdetermination conditions by the variational iteration method. *International journal of numerical methods for heat fluid flow*, 2014, vol. 24, iss. 7, pp. 1545-1552.
14. Farcas A., Lesnic D. The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable. *Journal of engineering mathematics*, 2006, vol. 54, pp. 375-388.
15. Прилепко А.И. Корректность обратной задачи об источнике для параболических систем / А.И. Прилепко, Д.С. Ткаченко // *Дифференциальные уравнения*, 2004. – Т. 40. – № 11. – С. 1540-1547.
16. Yaparova N. Numerical methods for solving a boundary-value inverse heat conduction problem. *Inverse Problems in science and engineering*, 2014, vol. 22, no. 5, pp. 832-847.
17. Япарова Н.М. Метод решения обратной задачи идентификации функции источника с использованием преобразования Лапласа / Н.М. Япарова // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика*, 2016. – Т. 5. – № 3. – С. 20-35.

18. Лаврентьев М.А. Методы теории функции комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 738 с.
19. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 286 с.

**Япарова Наталья Михайловна.** Доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой математического обеспечения информационных технологий Южно-Уральского государственного университета (НИУ), Основные научные интересы: методы обработки информации, разработка и исследование методов и алгоритмов решения задач тепло и массопереноса с неполными, зашумленными исходными данными, обратные задачи. AuthorID: 15799, SPIN: 6353-4685, ORCID: 0000-0003-1821-1159, [iaparovam@susu.ru](mailto:iaparovam@susu.ru), 454080, Россия, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.

**Капелюшин Юрий Евгеньевич.** PhD, доцент, заведующий лабораторией научно-образовательного центра Южно-Уральского государственного университета (НИУ). Основные научные интересы: процессы тепло и массопереноса, создание новых производственных технологий и материалов. AuthorID: 955090, SPIN: 2543-2742, ORCID: 0000-0002-3352-1780, [kapelyushinye@susu.ru](mailto:kapelyushinye@susu.ru), 454080, Россия, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.

UDC 519.6+517.9

DOI:10.25729/ESI.2023.32.4.008

## Identification of an internal heat source and determining the thermal state of an object by dynamic boundary measurements

Natalia M. Yaparova, Yury E. Kapelyushin

South Ural State University (NRU),

Russia, Chelyabinsk, [iaparovam@susu.ru](mailto:iaparovam@susu.ru)

**Abstract.** The article considers the problem of identifying an internal heat source and assessing its influence on changes in the temperature of a controlled object. The problem of identifying a heat source arises during thermal control of power transmission, during heat treatment, and during non-destructive testing of buildings, structures and materials. The mathematical model of heat transfer inside an object is represented by a heat conduction equation with an unknown source function, initial conditions, and boundary conditions formed on the basis of the results of noisy temperature measurements obtained near the surface of the object. The article proposes an approach to identifying an internal heat source based on the transition from an inverse problem to an integral equation, a numerical method for solving it, as well as an algorithm for calculating non-stationary internal heat fields that takes into account the influence of a heat source. The stability of the identification method with respect to the error of the initial data is ensured by the choice of regularization parameters. The proposed approach and methods, in contrast to the existing ones, make it possible to establish an explicit dependence of the desired function of the internal heat source on boundary measurements in a situation where the temperature fields near the surface of the object change with time. The article presents error estimates for numerical solutions found as a result of a comparative analysis with test values. The results of the experiment indicate that the proposed methods reduce the negative impact of noise on the accuracy of data processing and allow determining the internal thermal state of an object from indirect measurements with a sufficient level of accuracy and can serve as a basis for determining the influence of an internal heat source on the formation of internal non-stationary temperature fields.

**Keywords:** heat transfer, technical systems, information processing method, inverse problem, integral equation, numerical method, regularization

**Acknowledgements:** The research was carried out under State Assignment Project (no. FWEU-2021-0014) of the Fundamental Research Program of Russian Federation 2021-2030 and funded by RFBR.

### References

1. Efendiev Y., Pun S.M., Vabishchevich P.N. Temporal splitting algorithms for non-stationary multiscale problems. *Journal of Computational Physics*, 2021, vol. 439, iss. 1, 110375.
2. Vasylyev V., Vasilyeva M., An accurate approximation of the two-phase stefan problem with coefficient smoothing. *Mathematics*, 2020, vol. 8, iss. 11, 19224.

3. Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., and Shishlenin M.A. Solving coefficient inverse problems for nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 727-737.
4. Korotkii A.I. and Starodubtseva Y.V. Direct and inverse boundary value problems for models of stationary reaction-convection-diffusion. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, pp. 96-112.
5. Diligenskaya A.N. Reshenie retrospektivnoj obratnoj zadachi teploprovodnosti na osnove parametriceskoj optimizacii [Solution of the retrospective inverse heat conduction problem with parametric optimization]. *Teplofizika vysokikh temperature [Thermophysics of high temperatures]*, 2018, vol. 56, no 3, pp. 382-388.
6. Procudina L.A., Yaparov D. Numerical modeling of the mass of the flowing liquid at transverse oscillations of the straight tube. *AIP conference proceedings application of mathematics in technical and natural sciences: 11th international conference for promoting the application of mathematics in technical and natural sciences*, 2019, 2164 – 120011.
7. Franco D., Infante G., Minhos F.M. Nonlocal boundary value problems. *Boundary value problems*, 2012.
8. Yaparova N. Mathematical modelling and method for solving a parametric identification problem for self-test of measuring devices. *Inverse problems in science and engineering*, 2016, vol. 24, iss. 1, pp. 77-91.
9. Bazhlekova E., Bazhlekov I. Identification of a space-dependent source term in a nonlocal problem for the general time-fractional diffusion equation. *Journal of computational and applied mathematics*, 2021, vol. 384, 113213.
10. Slimani S., Medarhri I., Najib K., Zine A. Identification of the source function for a seawater intrusion problem in unconfined aquifer. *Numerical algorithms*, 2020, vol. 84, iss. 4, pp. 1565-1587.
11. Rostamian M., Shahrezaee A. A meshless method for solving 1D time-dependent heat source problem. *Inverse problems in science and engineering*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 51-81.
12. Ismailov M.I., Kanca F., Lesnic D. Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions. *Applied mathematics and computation*, 2011, vol. 218, pp. 4138-4146.
13. Zhou G., Wu B. Identifying a time-dependent heat source with nonlocal boundary and overdetermination conditions by the variational iteration method. *International journal of numerical methods for heat fluid flow*, 2014, vol. 24, iss. 7, pp. 1545-1552.
14. Farcas A., Lesnic D. The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable. *Journal of engineering mathematics*, 2006, vol. 54, pp. 375-388.
15. Prilepko A.I., Tkachenko D.S. Korrektnost' obratnoj zadachi ob istochnike dlya parabolicheskikh sistem [Well-posedness of the inverse source problem for parabolic systems]. *Differentsial'nyye uravneniya [Differential Equations]*, 2004, vol.40, iss. 11, pp. 1619-1626
16. Yaparova N. Numerical methods for solving a boundary-value inverse heat conduction problem. *Inverse problems in science and engineering*, 2014, vol. 22, no. 5, pp. 832-847.
17. Yaparova N.M. Metod resheniya obratnoj zadachi identifikacii funkicii istochnika s ispol'zovaniem preobrazovaniya Laplasya [Method for solving an inverse term source problem based on the Laplace transform]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Vychislitel'naya matematika i informatika [Bulletin of the South Ural state university. Series: Computational mathematics and software engineering]*, 2016, vol. 5, iss. 3, pp. 20-35.
18. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funkicii kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of a complex variable]*. Moscow, Nauka [Science], 1973, 738 p.
19. Lavrent'ev M.M., Romanov V. G., Shishatskii S. P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza [Ill-posed problems of mathematical physics and analysis]*. Moscow, Nauka [Science], 1980. 286 p.

**Yaparova Natalia Mikhailovna.** Doctor of Science, Associate Professor, Head of the Department of Mathematical Foundations of Information Technologies, South Ural State University (NRU). Main scientific areas of interest: Data processing, methods and algorithms for solving the heat and mass transfer problems with incomplete and noisy initial data, inverse problems. AuthorID: 15799, SPIN: 6353-4685, ORCID: 0000-0003-1821-1159, iaparovannm@susu.ru, 454080, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia.

**Kapelyushin Yury Evgenyevich.** PhD, Associate Professor, Head of the laboratory of the scientific and educational center, South Ural State University (NRU). Main scientific areas of interest: heat and mass transfer processes, creation of new production technologies and materials. AuthorID: 955090, SPIN: 2543-2742, ORCID: 0000-0002-3352-1780, kapelyushinye@susu.ru, 454080, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia.

Статья поступила в редакцию 12.04.2023; одобрена после рецензирования 28.11.2023; принята к публикации 16.12.2023.

The article was submitted 04/12/2023; approved after reviewing 11/28/2023; accepted for publication 12/16/2023.