

Математическое моделирование

УДК 519.673

DOI:10.25729/ESI.2023.31.3.009

Математическая модель балочного конечного элемента Тимошенко

Дудаев Михаил Алексеевич

Иркутский государственный университет путей сообщения,

Россия, Иркутск, *dudaev_ma@mail.ru*

Аннотация. В статье рассмотрен вывод основных физико-математических зависимостей метода конечных элементов для балочного конечного элемента Тимошенко, работающего в условиях поперечного изгиба при статическом и динамическом нагружении и позволяющего более точно аппроксимировать поле перемещений по сравнению с классической теорией изгиба. Показано, что в этом случае податливость конечного элемента складывается из двух составляющих: «изгибной», вызванной действием изгибающего момента и «сдвиговой», вызванной действием поперечной силы, а угол поворота поперечного сечения отличается от угла наклона касательной к упругой оси изогнутой балки; при этом податливость сдвига существенно проявляется в коротких балках, длина которых соизмерима с высотой поперечного сечения. Математическая модель построена на основе вариационно-энергетического принципа теории упругости и метода конечных элементов. Для указанного типа конечного элемента получены полиномиальные функции формы, служащие для аппроксимации поля перемещений, с применением дифференциальных зависимостей, известных из курсов сопротивления материалов и теории упругости. Получены матрица градиентов функций форм, позволяющая определить вектор деформаций по известным значениям поля узловых перемещений, и матрица жесткости, имеющая ключевое значение в решении разрешающей системы линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов, выражение вектора напряжений и внутренних силовых факторов при поперечном изгибе, позволяющее определить их на основании узловых перемещений. Для полученной модели конечного элемента проведен анализ точности численного решения метода конечных элементов по отношению к аналитическому и представлено расхождение результатов расчета при использовании модели чистого изгиба балки и модели Тимошенко.

Ключевые слова: конечный элемент, метод конечных элементов, балка Тимошенко, поперечный изгиб, сдвиг, функции формы, матрица градиентов, матрица жесткости

Цитирование: Дудаев М.А. Математическая модель балочного конечного элемента Тимошенко / М.А. Дудаев // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2023. – № 3(31). – С. 94-102. – DOI:10.25729/ESI.2023.31.3.009.

Введение. В инженерном анализе балочных конструкций часто используется модель чистого изгиба: предположение, что основной вклад в нагружение балки приносит изгибающий момент, а действие поперечной силы менее существенно [1-4]. Однако такое утверждение справедливо лишь для балок, длина которых существенно превышает высоту [2]. Для коротких балок (рис. 1) вклад поперечной силы в общую картину нагружения увеличивается, а у очень коротких балок становится основным. По этой причине крепежные элементы (заклепки, призонные болты и т.п.) рассчитываются на чистый сдвиг [1-4].



а – вал турбины высокого давления; б – шпилька призонная
Рис. 1. Примеры коротких балок в конструкции турбомашин

Несмотря на существенное развитие вычислительной техники и математических моделей конечных элементов (КЭ) объемного напряженного и деформированного состояния

[5-9], балочные КЭ не теряют своей актуальности [10-14], поскольку позволяют существенно экономить время расчета модели, что особенно актуально в нелинейных задачах и задачах динамики.

При моделировании крепежных деталей методом конечных элементов большей адекватностью обладает математическая модель балки Тимошенко [10, 13], в которой учитывается действие обоих внутренних силовых факторов.

В работе [10] представлено получение матрицы жесткости балочного конечного элемента (КЭ) Тимошенко методом обращения матрицы податливостей. Указанный подход в некоторых случаях вполне оправдан, однако, не позволяет получить функции формы КЭ, аппроксимирующие поле перемещений, что затрудняет расчет внутренних силовых факторов КЭ, напряжений и деформаций в нем. Поэтому в данной работе предложена полная математическая модель балочного КЭ Тимошенко.

1. Функции формы конечного элемента. Для получения основных зависимостей рассматривается двухузловой КЭ (рис. 2) с узлами i и j в локальной системе координат: начало координат расположено в узле i , а ось x направлена вдоль КЭ от узла i к узлу j . Ось y направлена вверх. Каждый узел имеет две степени свободы: прогиб v_i, v_j и угол поворота поперечного сечения θ_i, θ_j . Координата x в узлах i и j принимает значения «0» и « l » соответственно.

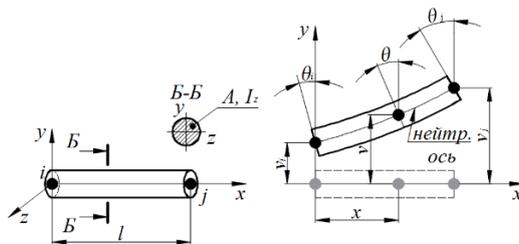


Рис. 2. Балочный конечный элемент

Векторы перемещений в точке и в узлах КЭ соответственно имеют вид:

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix}; \{v\}^e = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Определение поля перемещений в произвольной точке через узловые значения осуществляется с применением матрицы функций форм $[N]$, имеющей размерность 2×4 :

$$\{v\} = [N] \cdot \{v\}^e. \quad (2)$$

Прогиб в произвольной точке полностью определяется четырьмя перемещениями узлов, поэтому его аппроксимирующая функция взята в виде полинома третьей степени, описывающего изогнутую ось КЭ:

$$v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad (3)$$

и содержащего четыре постоянных $a_0 \dots a_3$.

Угол наклона касательной к изогнутой оси с учетом малости угла ($\text{tg } \varphi \approx \varphi$)

$$\varphi \approx \frac{dv}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2. \quad (4)$$

Отличие поперечного изгиба (рис. 3) от чистого заключается в том, что поперечные сечения в деформированном состоянии не остаются нормальными к изогнутой оси бруса, а отклоняются от нормали на угол сдвига γ [3]:

$$\theta = \varphi - \gamma, \quad (5)$$

который в пределах одного КЭ считается постоянным.

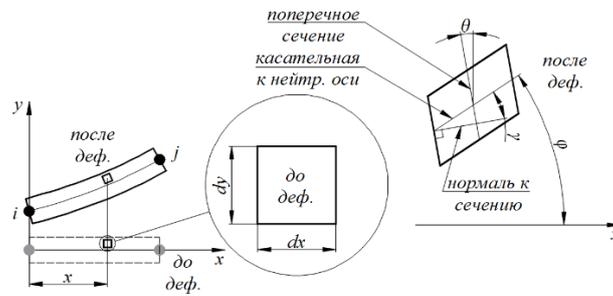


Рис. 3. Углы наклона касательной и поперечного сечения

Внутренние силовые факторы (изгибающий момент M_z и поперечная сила Q_y) определяются дифференциальными выражениями, известными из курса сопротивления материалов [1-4]:

$$M_z = \frac{d\theta}{dx} EI_z = (2a_2 + 6a_3x) EI_z; \quad (6)$$

$$Q_y = -\frac{dM_z}{dx} = -6a_3 EI_z,$$

где E – модуль Юнга материала КЭ; I_z – момент инерции поперечного сечения КЭ относительно оси z .

Знак «минус» в последнем выражении взят потому, что изгибающий момент, вызванный положительной поперечной силой, уменьшается при возрастании координаты x .

Угол сдвига определяется на основании закона Гука для касательных напряжений [1-4]. При этом касательное напряжение определяется приближенно в предположении о равномерном распределении касательных напряжений по сечению:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Q_y}{A_{sy} G} = -6a_3 \frac{EI_z}{A_{sy} G}, \quad (7)$$

где G – модуль сдвига материала КЭ; A_{sy} – «эффективная» площадь поперечного сечения КЭ при сдвиге.

Таким образом, реальному КЭ с неравномерным распределением касательных напряжений по сечению сопоставляется условный КЭ с редуцированной (эффективной) площадью поперечного сечения

$$A_{sy} = k_y A, \quad (8)$$

где k_y – коэффициент, зависящий от формы и размеров сечения [1, 4]:

$$k_y = \frac{I_z^2}{A} \int_A \frac{b^2}{S_z^2} dA, \quad (9)$$

где b – ширина поперечного сечения; S_z – статический момент отсеченной части площади.

Так, например, для круглого поперечного сечения [4] $k_y = 9/10$, для тонкостенного кольца $k_y = 1/2$.

Для этого условного КЭ выполняются зависимости:

$$V = \int_{A_{sy}} \int dx dA_{sy}; \quad I_z = \int_{A_{sy}} y^2 dA_{sy}, \quad (10)$$

где V – объем условного КЭ.

С учетом (7) выражение угла поворота (5) принимает вид

$$\theta = a_1 + 2a_2x + 3a_3 \left(x^2 + 2 \frac{EI_z}{A_{sy} G} \right). \quad (11)$$

Постоянные a в выражениях (1) и (11) определяются из граничных условий КЭ:

- при $x = 0$ $v = v_i$, $\theta = \theta_i$;
- при $x = l$ $v = v_j$, $\theta = \theta_j$;

Тогда

$$\begin{aligned}
 a_0 &= v_i; \\
 a_1 &= \frac{12EI_z v_j - 12EI_z v_i + (6EI_z l + A_{sy} Gl^3) \theta_i - 6EI_z l \theta_j}{l(A_{sy} Gl^2 + 12EI_z)}; \\
 a_2 &= \frac{6A_{sy} Gv_i - 6A_{sy} Gv_j + 3A_{sy} Gl\theta_i + 3A_{sy} Gl\theta_j}{2(A_{sy} Gl^2 + 12EI_z)} - \frac{6I_z \theta_i - 6I_z \theta_j}{12I_z l}; \\
 a_3 &= \frac{A_{sy} G(2v_i - 2v_j + l\theta_i + l\theta_j)}{l(A_{sy} Gl^2 + 12EI_z)}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Для сокращения дальнейшей записи вводятся обозначения:

$$S_z = \frac{EGI_z A_{sy}}{l(A_{sy} Gl^2 + 12EI_z)}; \quad \bar{x} = \frac{x}{l}. \tag{13}$$

При этом \bar{x} играет роль относительной координаты в пределах КЭ: $0 \leq \bar{x} \leq 1$. Дифференциал x в этом случае

$$dx = l \cdot d\bar{x}. \tag{14}$$

С учетом выражений (2), (12) – (14) матрица функций форм (транспонирована для сокращения записи) имеет вид

$$[N]^T = S_z l^4 \begin{bmatrix} \frac{1-3\bar{x}^2+2\bar{x}^3}{EI_z l} + \frac{12-12\bar{x}}{A_{sy} Gl^3} & \frac{6\bar{x}^2-6\bar{x}}{EI_z l^2} \\ \frac{\bar{x}-2\bar{x}^2+\bar{x}^3}{EI_z} + \frac{6\bar{x}^2-6\bar{x}}{A_{sy} Gl^2} & \frac{1-4\bar{x}+3\bar{x}^2}{EI_z l} + \frac{12-12\bar{x}}{A_{sy} Gl^3} \\ \frac{12\bar{x}}{A_{sy} Gl^3} - \frac{2\bar{x}^3-3\bar{x}^2}{EI_z l} & -\frac{6\bar{x}^2-6\bar{x}}{EI_z l^2} \\ \frac{\bar{x}^3-\bar{x}^2}{EI_z} + \frac{6\bar{x}^2-6\bar{x}}{A_{sy} Gl^2} & \frac{12\bar{x}}{A_{sy} Gl^3} - \frac{2\bar{x}-3\bar{x}^2}{EI_z l} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Заметим, что поскольку перемещения при поперечном изгибе обуславливаются сразу двумя внутренними силовыми факторами с разными коэффициентами жесткости, элементы полученной матрицы являются функциями не только формы КЭ, но также зависят от геометрических характеристик поперечного сечения и упругих постоянных материала.

2. Матрица градиентов функций форм конечного элемента. Вектор деформаций в точке КЭ включает в себя две составляющие: осевую деформацию ε_x (возникающую за счет растяжения или сжатия волокон), и деформацию сдвига γ :

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \gamma \end{matrix} \right\}. \tag{16}$$

Уравнения Коши, связывающие деформации и перемещения в точке, из курса теории упругости [15, 16]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\}, \tag{17}$$

где u – продольное перемещение точки, возникающее из-за осевой деформации волокна балочного КЭ (рис. 4):

$$u = -y\theta = -y\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \gamma\right). \quad (18)$$

Знак «минус» в выражении взят потому, что при положительном угле θ деформации волокон, расположенных выше нейтральной оси, – отрицательные (сжатые волокна).

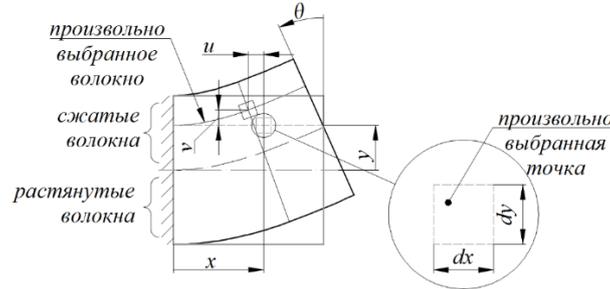


Рис. 4. Перемещения точки при изгибе

Тогда с учетом постоянства деформации сдвига по длине КЭ ($\gamma \neq \gamma(x)$):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= -y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \gamma \right) = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \gamma &= -\theta + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

Последнее уравнение совпадает с выражением (5).

Уравнения Коши в матричной записи имеют вид

$$\{\varepsilon\} = [A] \cdot \{v\}, \quad (20)$$

где $[A]$ – матрица, содержащая операторы частных производных [15]:

$$[A] = \begin{bmatrix} -y \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & -1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Подставляя в уравнения Коши (20) выражение (2), получим

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{v\}^e, \quad (22)$$

где $[B]$ – матрица «градиентов» функций форм:

$$[B] = [A] \cdot [N]; \quad (23)$$

$$[B] = S_z l^4 \begin{bmatrix} y \frac{6-12\bar{x}}{EI_z} l & y \left(\frac{4-6\bar{x}}{EI_z} l^2 + \frac{12}{A_{sy} G} \right) & -y \frac{6-12\bar{x}}{EI_z} l & y \left(\frac{2-6\bar{x}}{EI_z} l^2 - \frac{12}{A_{sy} G} \right) \\ \frac{-12}{A_{sy} G} & \frac{-6l}{A_{sy} G} & \frac{12}{A_{sy} G} & \frac{-6l}{A_{sy} G} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

3. Матрица жесткости конечного элемента. Вектор напряжений в точке КЭ включает в себя две компоненты (нормальное и касательное) и на основании закона Гука выражается через деформации, а также, с использованием (22), через вектор узловых перемещения КЭ:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau \end{Bmatrix}; \quad (25)$$

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} = [D] \cdot [B] \cdot \{v\}^e, \quad (26)$$

где $[D]$ – матрица упругости:

$$[D] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Величины внутренних силовых факторов определяются через компоненты вектора напряжений:

$$M_z = \frac{I_z}{y} \sigma_x; Q_y = \tau A_{sy}. \quad (28)$$

Матрица жесткости КЭ на основании вариационно-энергетического принципа в МКЭ [5-9] определяется выражением

$$[K]^e = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dV. \quad (29)$$

Тогда с учетом выражений (10) и (14)

$$[K]^e = l \int_0^1 \int_A [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dA_{sy} d\bar{x}. \quad (30)$$

Проведя вычисления, получим

$$[K]^e = S \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 + 12 \frac{EI_z}{A_{sy}G} & -6l & -2l^2 - 12 \frac{EI_z}{A_{sy}G} \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & -2l^2 - 12 \frac{EI_z}{A_{sy}G} & -6l & 4l^2 + 12 \frac{EI_z}{A_{sy}G} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Полученная матрица жесткости в точности совпадает с матрицей, полученной в работе [10], однако, в данном случае имеет обоснование на основе вариационно-энергетического подхода к МКЭ [9], матрицу функций формы и матрицу градиентов, полученные в явном виде, что позволяет определять перемещения, деформации, напряжения и внутренние силовые факторы конечного элемента в произвольной точке.

4. Оценка точности численного решения. Для оценки точности работы балочного КЭ Тимошенко рассмотрена задача изгиба балки постоянного поперечного сечения (рис. 5). Материал балки – сталь ($E = 210000$ МПа, $G = 80000$ МПа [1]), поперечное сечение – кольцо ($D = 100$ мм, $d = 95$ мм, $k_y = 1/2$, $I_z = 9,105 \cdot 10^5$ мм⁴, $A_{sy} = 383$ мм²), величина силы $F = 1000$ Н. Длины балок l приняты равными 100, 200, 300 и 400 мм. Эпюры внутренних силовых факторов показаны на рис. 5.

Аналитическое решение задачи проведено методом начальных параметров [1-4] от заделки (точка O) с использованием относительной координаты \bar{x} из формулы (13) для удобства сравнения кривых прогибов независимо от длины балки. Для случая без учета сдвига прогиб балки определяется формулой

$$v = \frac{Fl^3}{EI_z} \left(\frac{\bar{x}^3}{6} - \frac{\bar{x}^2}{2} \right), \quad (32)$$

а для случая с учетом сдвига:

$$v = \frac{Fl^3}{EI_z} \left(\frac{\bar{x}^3}{6} - \frac{\bar{x}^2}{2} \right) - \frac{Fl}{GA_{sy}} \bar{x}. \quad (33)$$

Расчет МКЭ проведен при использовании в модели двадцати КЭ независимо от длины моделируемой балки.

Результаты расчета кривых прогибов показаны на рис. 5. При этом во всех случаях результаты расчета МКЭ в точности совпадают с аналитическим решением (33), что объясняется совпадением порядка полинома, аппроксимирующего перемещение КЭ и точного решения [1-4], поэтому кривые на рис. 5 неразличимы.

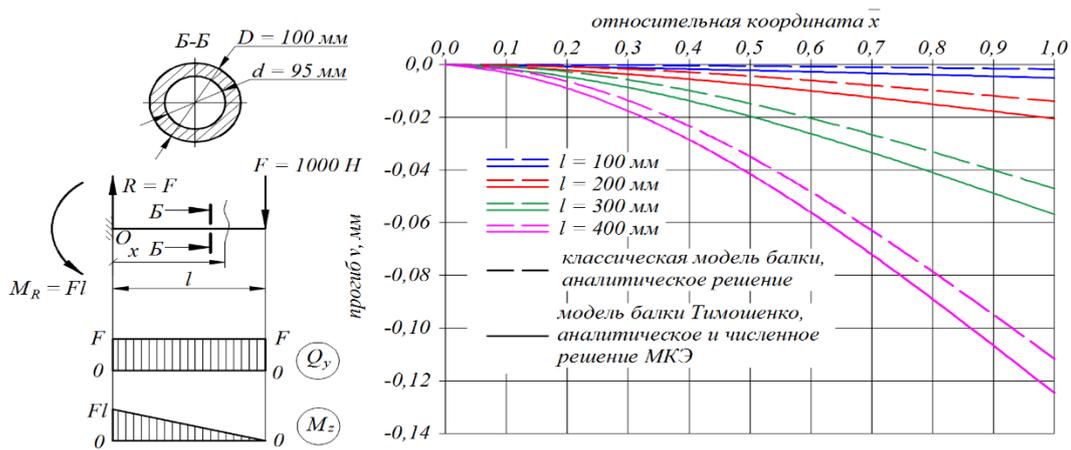


Рис. 5. Результаты аналитического и численного решения МКЭ задачи об изгибе балки

На рис. 6 представлены кривые расхождения прогибов балок классической модели и модели Тимошенко.

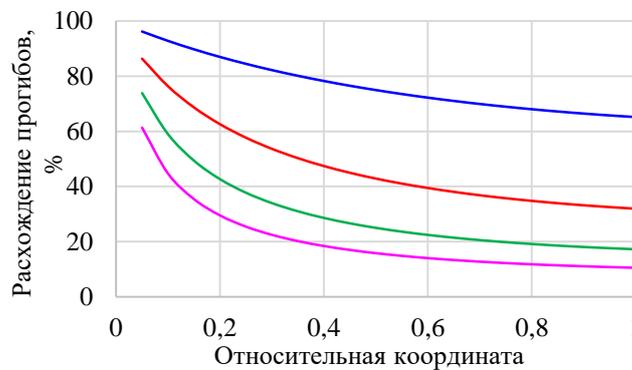


Рис. 6. Кривые расхождения прогибов балок

Величина относительного расхождения при этом определялась по формуле:

$$\Delta(\bar{x}) = \left| \frac{v_T(\bar{x}) - v(\bar{x})}{v_T(\bar{x})} \right| \cdot 100\%, \quad (34)$$

где $v_T(\bar{x})$ – функция прогиба балки Тимошенко; $v(\bar{x})$ – функция прогиба классической балки.

Из анализа представленных диаграмм видно, что относительный вклад сдвига в общий уровень прогиба наиболее существенно проявляется вблизи заделки и для всех исследованных балок превышает 50%. С удалением от заделки относительный вклад сдвига снижается, однако, все равно остается существенным. Можно также заметить, что величина расхождения прогибов во всех точках упругой оси меньше для более длинных балок, однако, во всех исследованных случаях величина расхождения остается выше 10%, что подчеркивает актуальность учета явления сдвига при использовании балочных КЭ.

Заключение. В работе показано, что учет дополнительной податливости сдвига в коротких балках существенно сказывается на уровне деформационных перемещений. Расхождение результатов расчета перемещений классического балочного КЭ и КЭ Тимошенко достигает 10% и более, что является неприемлемым в технических расчетах. Предложенная математическая модель балочного КЭ Тимошенко имеет высокую адекватность, что подтверждается аналитическим расчетом, и в точности аппроксимирует поле перемещений в задачах об изгибе балки сосредоточенными силами. Дополнительным преимуществом предложенной модели КЭ Тимошенко является сохранение размерности задачи по сравнению с классической моделью: учет дополнительной податливости производится без введения дополнительных узловых степеней свободы.

Список источников

1. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736 с.
2. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Том 1. Элементарная теория и задачи / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1965. – 364 с.
3. Александров А.В. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; под ред. А.В. Александрова. – 3-е изд. испр. – М.: Высш. шк., 2003. – 560 с.
4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: учеб. для вузов. – 10-е изд. / В.И. Феодосьев. – М.: МГТУ имени Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
6. Образцов И.Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов: учеб. пособие для студентов авиац. спец. вузов / И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев, Х.С. Хазанов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
7. Chen Z. Finite element methods and their applications. Berlin, Germany: Springer, 2005, 411 p.
8. Bathe K.J. Finite element procedures. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice hall, 1996, 1038 p.
9. Пыхалов А.А. Контактная задача статического и динамического анализа сборных роторов турбомашин: дис. на соискание ученой степени ...д-ра. техн. наук / Пыхалов Анатолий Александрович. – Москва, 2006. – 405 с.
10. Дудаев М.А. Матрица жесткости балки Тимошенко в конечноэлементном анализе динамического поведения роторных турбомашин / М.А. Дудаев // Вестник ИрГТУ, 2014. – № 6. – С. 59-65.
11. Дудаев М.А. Моделирование динамического поведения бруса при повторно-переменных нагрузках в лабораторных условиях / М.А. Дудаев, Д.В. Немитовская, А.Э. Верянская // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование, 2022. – № 2(74). – С. 22-32.
12. Янов Д.В. Концептуальное проектирование и оптимизация силового каркаса кабины грузового автомобиля / Д.В. Янов, Д.А. Скабин, С.Ю. Посохов [и др.] // Вестник Концерна ВКО "Алмаз – Антей", 2023. – № 1. – С. 67-81.
13. Ерофеев В.И. Динамическое поведение балок моделей Бернулли-Эйлера, Рэлея и Тимошенко, лежащих на упругом основании (сравнительный анализ) / В.И. Ерофеев, В.В. Кажаяев, Е.Е. Лисенкова, Н.П. Семерикова // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011. – № 5-3. – С. 274-278.
14. Абрамян А.К. Бегущие и стоячие волны балки Тимошенко / А.К. Абрамян, Д.А. Индейцев, В.А. Постнов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2018. – № 2. – С. 101-109.
15. Александров А.В. Основы теории упругости и пластичности: учеб. для строит. спец. вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высш. шк., 1990. – 400 с.
16. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Машиностроение, 1975. – 500 с.

Дудаев Михаил Алексеевич. Иркутский государственный университет путей сообщения, старший преподаватель. Основные направления исследований автора: механика деформируемого твердого тела, динамика, метод конечных элементов. AuthorID: 688571, SPIN: 7575-9125, dudaev_ma@mail.ru, 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15.

UDC 519.673

DOI:10.25729/ESI.2023.31.3.009

Mathematical model of the Timoshenko beam finite element

Mikhail A. Dudaev

Irkutsk State Transport University, Russia, Irkutsk, dudaev_ma@irgups.ru

Abstract. There is physico-mathematics dependences conclusion of a finite element method for the Timoshenko beam finite element at the article, which is working by the shear bend at static and dynamic load conditions and allows more accurately approximate displacement field in comparison with the classical bending theory. It's shown, the softening of a finite element in this case is resultant of two components compose: "bending" caused by the bending moment action and "shear", caused by the shear force action, and cross section angle is different from the beam elastic axis tangent angle; also the shear softening is appeared at short beams, where length is commensurable with height of the beam cross section. The mathematical model is built by the base of variational energy principle of the finite element method. For the indicated type of finite element, polynomial shape functions are obtained, which serve to approximate the displacement field, using differential dependencies known from the courses of resistance of materials and the theory of elasticity. There was gotten the gradient matrix, which allows

to determine the deformation vector by the values of the node translation pole and the stiffness matrix, which is had the key meaning at the solving of the system of linear algebraic equations of the finite element method, value of the stress vector and internal force factors at the shear bending, which allows to determine it by the nodes translations. For the finite element model was made convergence analysis of the numerical finite element method by relative to the analytical calculation and are shown results deviation when the model of pure bending and Timoshenko beam model were used.

Keywords: finite element, finite element method, Timoshenko beam, shear bend, shear, form functions, gradient matrix, stiffness matrix

References

1. Pisarenko G.S., Jakovlev A.P., Matveev V.V. Spravochnik po soprotivleniju materialov [Handbook of Strength of Materials]. Kiev, Naukova dumka [Scientific thought], 1988, 736 p.
2. Timoshenko S.P. Soprotivlenie materialov. Tom 1. Jelementarnaja teorija i zadachi [Strength of Materials. Volume 1. Elementary theory and problems]. Moscow, Nauka [Science], 1965, 364 p.
3. Aleksandrov A.V., Potapov V.D., Derzhavin B.P. Soprotivlenie materialov: ucheb. dlja vuzov [Strength of Materials: Textbook for universities]. Moscow, Vysshaya Shkola [Higher school], 2003, 560 p.
4. Feodos'ev. V.I. Soprotivlenie materialov: ucheb. dlja vuzov. – 10-e izd., Strength of Materials: Textbook for universities]. Moscow, MGTU imeni Baumana [MSTU named after Bauman], 1999, 592 p.
5. Zenkevich O. Metod konechnyh jelementov v tehnike [Finite element method at the technique]. Moscow, Mir, 1975, 542 p.
6. Obrazcov I.F., Savel'ev L.M., Hazanov H.S. Metod konechnyh jelementov v zadachah stroitel'noj mehaniki letatel'nyh apparatov: ucheb. posobie dlja studentov aviac. spec. vuzov [Finite element method in problems of structural mechanics of aircraft: textbook allowance for aviation students specialist universities]. Moscow, Vysshaya shkola [Higher school], 1985, 392 p.
7. Chen Z. Finite element methods and their applications. Berlin, Germany: Springer, 2005, 411 p.
8. Bathe K.J. Finite element procedures. Upper Saddle river, New Jersey: Prntice hall, 1996, 1038 p.
9. Pykhalov A.A. Kontaknaia zadacha staticheskogo i dinamicheskogo analiza sbornykh rotorov turbomashin [Contact problem of static and dynamic analysis of rotor assembly turbomachines]: dis. for the degree of Dr. tech. Sciences. Moscow, 2006, 405 p.
10. Dudaev M.A. Matrica zhestkosti balki Timoshenko v konechnojelementnom analize dinamicheskogo povedenija rotornykh turbomashin [Stiffness matrix of Timoshenko beam in the finite element analysis of dynamic behavior of turbo machines]. Vestnik IrGTU [Bulletin of ISTU], 2014, no. 6, pp. 59-65.
11. Dudaev M.A., Nemitovskaja D.V., Verjanskaja A.Je. Modelirovanie dinamicheskogo povedenija brusa pri povtorno-peremennyh nagruzkah v laboratornyh uslovijah [The bar dynamic behavior simulation by repeatable loading at the laboratory conditions]. Sovremennye tehnologii. Sistemnyj analiz. Modelirovanie [Modern technologies. System analysis. Modeling], 2022, no. 2(74), pp. 22-32.
12. Janov D.V., Skabin D.A., Posohov S.Ju. [et al.] Konceptual'noe proektirovanie i optimizacija silovogo karkasa kabiny gruzovogo avtomobilja [Concept design and optimisation of the load-bearing frame of the truck cabin]. Vestnik Koncerna VKO "Almaz – Antej" [Bulletin of the Concern VKO "Almaz-Antey".], 2023, no. 1, pp. 67-81.
13. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Lisenkova E.E., Semerikova N.P. Dinamicheskoe povedenie balok modelej Bernulli-Jejlera, Rjeleja i Timoshenko, lezhashhiih na uprugom osnovanii (sravnitel'nyj analiz) [Dynamic behaviour of bernoulli-euler, rayleigh and timoshenko beam models, lying on an elastic foundation (comparative analysis)]. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo [Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod], 2011, no. 5-3, pp. 274-278.
14. Abramjan A.K., Indejev D.A., Postnov V.A. Begushhie i stojachie volny balki Timoshenko [Running and standing waves of Timoshenko beam] Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Mehanika tverdogo tela [A Journal of Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids], 2018, no. 2, pp. 101-109.
15. Aleksandrov A.V., Potapov V.D. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]: ucheb. dlja stroit. spec. vuzov. Moscow. Vysshaya shkola [Higher school], 1990, 400 p.
16. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. Teorija uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow, Mashinostroenie [Engineering], 1975, 500 p.

Dudaev Mikhail Alekseevich. Irkutsk State Transport University, Assistant Professor. The main areas of research of the author: mechanics of a deformable solid body, dynamics, finite element method. AuthorID: 688571, SPIN: 7575-9125, dudaev_ma@mail.ru, 664074, Irkutsk, st. Chernyshevsky, 15.

Статья поступила в редакцию 23.05.2023; одобрена после рецензирования 17.07.2023; принята к публикации 16.08.2023.

The article was submitted 05/23/2023; approved after reviewing 07/17/2023; accepted for publication 08/16/2023.