

УДК 519.876

DOI: 10.38028/ESI.2022.28.4.019

К вопросу развития гибридного аналитического подхода к моделированию сложных систем, содержащих как слабо структурированные, так и хорошо структурированные подсистемы

Рыков Юрий Германович

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,

Россия, Москва, rykov@keldysh.ru

Аннотация. В настоящее время методология искусственного интеллекта приобретает все больше и больше применений. Особенно много внимания привлекают нейронные сети (НС). Одна из главных причин этого заключается в том, что технология НС в некотором смысле носит универсальный характер. С другой стороны, некоторые другие компьютерные технологии, имеющие природу искусственного интеллекта, также обладают свойствами универсальности. В контексте настоящей статьи это технологии нечетких когнитивных карт (НКК) и специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных, так называемых «систем законов сохранения» (СЗС). Все только что упомянутые подходы используются для разработки моделей сложных систем (СС), т.е. совокупности большого количества элементов со связями между ними различного типа. Специфика теории СЗС, которая способна моделировать совместные балансы различных величин на уровне физических процессов, заключается в наличии нелинейных эффектов, таких, как образование особенностей в решениях. Технология НКК допускает расширение первоначальной концепции Б. Коско с более широким диапазоном интерпретации. В статье представлена иллюстрация того, как эти технологии могут быть объединены в некую единую методологию создания среды моделирования СС на основе подхода НС.

Ключевые слова: сложные системы, информатика, среды моделирования, нечеткие когнитивные карты, взвешенный оргграф, разбиение графа по циклам, законы сохранения, вариационное представление, нейронные сети для законов сохранения

Цитирование: Рыков Ю.Г. К вопросу развития гибридного аналитического подхода к моделированию сложных систем, содержащих как слабо структурированные, так и хорошо структурированные подсистемы / Ю.Г. Рыков // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2022. – № 4(28). – С. 234-247. DOI: 10.38028/ESI.2022.28.4.019.

Введение. Современный этап процесса «цифровизации» подошел к тому моменту, когда в развитых обществах возникает потребность в моделировании не отдельных явлений, или даже классов явлений, а их достаточно широкой взаимосвязанной совокупности. В качестве поясняющего примера можно рассмотреть детальное моделирование жизни города с отражением, в частности, таких факторов, как, например, протекание производственных процессов, и факторов другого рода, например, социальной реакции жителей на работу предприятий с экологической точки зрения. Данный подход к моделированию представлен, в том числе, в сформировавшихся к настоящему моменту концепциях цифровых двойников (digital twin) и метавселенных (metaverse). Хороший иллюстративный материал по этому вопросу содержится, например, в ресурсах компании NVIDIA <https://www.nvidia.com/ru-ru/>, активно работающей в этом направлении.

В связи со сказанным повышается интерес к совершенствованию и, возможно, синтезу технологий моделирования, позволяющему с единой точки зрения охватить системы, содержащие как слабо структурированные (например, социальные подсистемы при недостатке информации), так и хорошо структурированные подсистемы (например, модели конкретных производств на уровне физических процессов). Такой синтез мог бы способствовать повышению качества мониторинга, анализа, выработки управляющих воздействий для подобных систем. Далее мы будем рассматривать так называемые «сложные системы» (сокращенно: СС), т.е. системы, состоящие из множества взаимосвязанных элементов. При этом природа элементов (групп элементов) может быть различной: это могут

быть факторы, характеризующиеся некоторым числом или функцией, или алгоритмы (например, модели течения газа в производственном процессе) со своей внутренней структурой, которые связаны с СС посредством только входных и выходных данных и т.п. К настоящему времени имеется множество подходов и сред моделирования СС. Рамки настоящей статьи позволяют лишь упомянуть некоторые из них: это модели системной динамики, когнитивные карты, мультиагентное моделирование, регрессионный анализ, методы искусственного интеллекта и т.д., и, соответственно, приводимые ниже ссылки являются иллюстративными, ни в коей мере не отражающими существующее многообразие работ по данной тематике. Основными проблемами при подобном моделировании являются размерность задачи, производительность вычислительных средств и наличие данных в необходимом объеме и должного качества. В работе будет проиллюстрировано на концептуальном уровне утверждение о том, что для преодоления указанных проблем моделирования СС вида, описанного выше, удобно использовать нейронные сети (НС), понимаемые в некотором расширенном смысле, о чем будет сказано ниже в разделе 1. НС обладают достаточной гибкостью в отношении реализации на высокопроизводительных вычислительных средствах, могут быть достаточно большого объема и реализовывать вычислительные технологии, которые могут давать осмысленные результаты и в условиях недостатка данных.

Для указанной выше иллюстрации рассмотрим две технологии: технологию моделирования слабо структурированных систем и ситуаций – нечеткие когнитивные карты (НКК), а также технологию моделирования хорошо структурированных процессов – системы уравнений в частных производных, описывающих некоторые точные физические процессы (в частности, течения газа), например, на производстве. Последнюю технологию рассмотрим в виде более узкого класса уравнений, так называемых «систем законов сохранения» (СЗС).

Непосредственным предшественником технологии НКК, по-видимому, можно считать системную динамику Дж. Форрестера, см., например, [1]. Это направление развилось во многих направлениях, включая использование в социально-экономическом моделировании обыкновенных дифференциальных уравнений, как за рубежом, так и в СССР/РФ, см., например, отечественные публикации [2-4] и интернет-ресурсы ИСА РАН. Еще одним примером данной направленности является школа имитационного моделирования в среде Anylogic, <https://www.anylogic.ru/resources/articles>, где, в том числе, обсуждаются проблемы комбинации методов системной динамики и агентного моделирования (агентное моделирование активно развивается, например, в ЦЭМИ РАН). Следующий шаг был сделан Б. Коско, который ввел концепцию НКК, [5]. В настоящее время теория и практика НКК интенсивно развиваются, см., например, [6-12], но, в первую очередь, как эмпирический инструмент для моделирования социально-технических проблем в условиях нечеткости. В настоящей работе мы предлагаем уделить основное внимание математическим структурам, которые могут быть использованы в НКК, и их связи с НС. Теория СЗС также является хорошо зарекомендовавшей себя областью исследований, в качестве практического приложения она включает в себя различные проблемы газовой динамики, механики твердого тела, химических процессов и т.д.; см., например, [13-16]. Системы типа СЗС могут быть решены с помощью НС, а также использоваться для создания цифровых двойников, как, например, описано в [15]. Далее в статье на основе вариационного подхода к системам СЗС мы иллюстрируем возможность введения новой нетрадиционной функции ошибки, которая учитывает характерные свойства решений и, вообще говоря, может обеспечить большую робастность метода НС по сравнению с другими численными методами.

Таким образом, оказывается теоретически возможным создать структуру нейросетевого типа для моделирования, например, функционирования городской среды, где сочеталось бы

детальное моделирование разнородных процессов, например, социальных (при недостатке данных) и производственных.

1. Расширенная интерпретация нечетких когнитивных карт. Как правило, НКК представляет собой оргграф со значениями (какой-либо природы), присвоенными вершинам (понятиям) и ребрам (отношениям), и правилами для вычисления этих значений. При этом значения (веса) нормализуются для того, чтобы удовлетворять условиям, обычно предъявляемым к функциям принадлежности в нечетких системах.

Понятие веса имеет основу в нечеткой логике. Рассмотрим простейший элемент НКК: две вершины (концепты) A_1 и A_2 , соединенные ребром с определенным числовым весом a_{12} . При этом концепты принадлежат определенной предметной области и принимают определенный набор качественных значений, которые выражаются в виде функций принадлежности. Связь интерпретируется как причинно-следственная, и сила этой связи заключается в уровне зависимости между функциями принадлежности. А именно, нечеткие концепты A_1 и A_2 имеют функции принадлежности $A_1(x), A_2(x): X \rightarrow [-1, 1]$, где $x \in X$ – данная предметная область. Множество нечетких подмножеств A_2 определено, как $\mathbb{F}(A_2) = \{B(x), x \in X : B(x) \leq A_2(x), x \in X\}$, но само это множество все еще четкое, и из концепта B (чьей характеристикой является функция принадлежности $B(x)$) концепт A_2 следует четким образом. Иначе говоря, в случае $A_1 \in \mathbb{F}(A_2)$ два нечетких концепта следуют один из другого четким образом, но причинно-следственная связь имеет нечеткий характер, т.е. $A_1 \in \mathbb{F}(A_2)$ с некоторой степенью. Данное наблюдение является базисом для введения понятия нечеткого множества всех подмножеств нечеткого множества A_2 – $\Pi(A_2)$, а именно, $\Pi(A_2)$ определяется как функция на $\mathbb{F}(X)$, т.е. $\Pi(A_2): \mathbb{F}(X) \rightarrow [0, 1]$ и $\Pi(A_2)(A_1)$ представляет собой некоторую меру того, насколько A_1 является нечетким подмножеством A_2 . Конкретные меры могут быть различными, что обуславливает неоднозначность введенного понятия. На практике вводятся различные меры того, насколько сильно график $A_1(x)$ «лежит ниже» графика $A_2(x)$. Наиболее простым способом выразить взаимоотношение между $A_1(x)$ и $A_2(x)$ можно, вводя числовую характеристику a_{12} , которая и есть вес.

Однако с точки зрения структуры СС имеет значение наличие концептов, связей между ними и весов, приписываемых этим объектам, которые, в общем случае, могут иметь как числовую, так и функциональную форму. Конкретный характер связей не так важен. Числовые значения весов используются чаще всего. Как правило, для их получения на практике описанная выше теоретическая конструкция непосредственно не используется. Широко применяются экспертные методы или методы, связанные с введением лингвистических переменных и правил нечеткого вывода с соответствующими процедурами фаззификации и дефаззификации. Другое направление, более близкое к проблематике НС, предполагает получение весов с использованием алгоритмов обучения как с учителем (с входными и выходными наборами данных), так и без учителя (алгоритмы адаптации весов). Мы не будем останавливаться на этом вопросе более подробно.

В рамках данной статьи сосредоточимся на особенностях математической структуры НКК независимо от природы концептов и на связи структуры СС и свойств процедуры вычисления значений (весов) этих концептов (элементов).

Представим СС как набор элементов (вершин) $A = \{A_j, j = 1, \dots, N\}$, которые связаны отношением зависимости. Это отношение определяется как множество E упорядоченных пар $e_{ij} = (A_i, A_j)$. Каждую такую пару назовем ребром. Каждому ребру припишем некоторый числовой вес a_{ij} , то есть рассматриваемая СС представляет собой взвешенный орграф (A, E) . Отметим кратко, что, вообще говоря, значения весов вершин и ребер не обязательно должны иметь числовой характер. В отличие от традиционных формулировок мы не налагаем в данный момент на значения A_j и a_{ij} каких-либо нормализующих ограничений (как, например, для функций принадлежности или вероятностных мер). Обозначим $V_{A_j} = \{i : e_{ij} \in E\}$ и предположим, что каждой вершине соответствует некоторая функция/функционал $A_j = \Phi_j(\{A_k, a_{kj}\})$, $k \in V_{A_j}$. Тогда множество Φ_j позволяет рассчитать значения множества вершин A_j , если известны значения вершин, от которых A_j зависит, и веса соответствующих связей. Такую комбинацию орграфа и определенной на нем вычислительной процедуры можно рассматривать как некоторую НС. На типичной НС также определена некоторая вычислительная процедура, но соответствующий граф имеет древовидную структуру. В нашем же случае структура графа может включать и циклы, которые, как будет показано ниже, имеют важное значение для вводимых характеристик СС. Поэтому здесь нас будут интересовать свойства СС, которые можно получить на основе свойств введенной вычислительной процедуры. В качестве иллюстрирующего примера определим последовательно характеристику «степень влияния вершин».

Пусть для некоторых $j = \omega_1, \dots, \omega_\Omega$ $V_{A_j} = \emptyset$. Это означает, что вершины $A_{\omega_1}, \dots, A_{\omega_\Omega}$ являются входными параметрами, и значения других вершин могут быть, вообще говоря, выражены через значения этих входных вершин, то есть $A_j = F_j(A_{\omega_1}, \dots, A_{\omega_\Omega})$, $j \neq \omega_1, \dots, \omega_\Omega$. Здесь F_j могут быть как функциями, так и функционалами.

Пусть теперь для простоты все рассматриваемые значения представляют собой действительные числа, то есть F_j являются функциями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем СС совместной, если функции F_j определены для всех $j \neq \omega_1, \dots, \omega_\Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Значение $|\partial F_j / \partial A_{\omega_k}|$ назовем степенью влияния входной вершины с номером ω_k на вершину с номером j .

Предположим теперь, что Φ_j являются линейными функциями. Тогда вычислительная система на орграфе (A, E) выглядит следующим образом:

$$A_j = \sum_{i=1}^N a_{ij} A_i, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Пусть для $j = 1, \dots, n_1$ $a_{ij} = 0 \forall i$, то есть для вершин A_j , $j = 1, \dots, n_1$ нет входящих ребер, и, значит, эти вершины являются входными. Выделяя такие вершины, преобразуем (1) к виду

$$A_j = \sum_{i=1}^{n_1} a_{ij} A_i + \sum_{i=n_1+1}^N a_{ij} A_i, \quad j = n_1 + 1, \dots, N. \quad (2)$$

Выполняя простые алгебраические преобразования и, возможно, перенумерацию в (2), приходим к следующим уравнениям:

$$\sum_{i=n_1+1}^m \alpha_{ij} A_i = R_j, \quad j = n_1 + 1, \dots, m, \quad (3)$$

где $\alpha_{ij} \equiv \delta_{ij} - a_{ij}$, $i, j = n_1 + 1, \dots, N$; $R_j \equiv \sum_{i=1}^{n_1} a_{ij} A_i$, $j = n_1 + 1, \dots, N$; $m \equiv N - n_1$. Обозначим также $\{\alpha_{ij}\} \equiv \Lambda$. Тогда в соответствии с Определением 1 СС совместна, если система уравнений (3) разрешима, то есть $\det \Lambda \neq 0$.

Рассчитаем степень влияния входных вершин на другие вершины в соответствии с Определением 2 и продемонстрируем связь этого показателя со структурой СС. Из системы (3) можно получить (при условии разрешимости (3)) выражения для функций F_j , которые при выполнении наших предположений будут линейными. Из стандартных формул Крамера следует, что $A_i = \det \Lambda_i / \det \Lambda$, $i = 1, \dots, m$, где Λ_i представляет собой матрицу Λ , в которой строка i заменена вектором $\{R_j\}$. Вектор $\{R_j\}$ содержит линейную комбинацию входных вершин, обозначим их через $\bar{A}_l, l = 1, \dots, n_1$. Тогда можно написать

$$A_i = \frac{\det \Lambda_i}{\det \Lambda} = \sum_{l=1}^{n_1} \frac{F_{il}}{\det \Lambda} \bar{A}_l, \quad (4)$$

где F_{il} представляют собой некоторые коэффициенты, которые зависят от значений матрицы смежности $\{a_{ij}\}$ исходного орграфа. Поэтому в соответствии с Определением 2 величина $|F_{il} / \det \Lambda|$ является степенью влияния входной вершины \bar{A}_l на вершину A_i . Поскольку $\det \Lambda$ в (4) присутствует в характеристике степени влияния для всех i , он может не учитываться при сравнении степеней влияния на разные вершины. Более того, ниже, как правило, будет использоваться нормализованное выражение для степени влияния, а именно, отношение $|F_{il}| / \max_{(i,l)} |F_{il}|$. В этом случае значение $\det \Lambda$ также не важно.

Ниже будет сформулировано правило для вычисления коэффициентов F_{il} , которое зависит от геометрии орграфа, то есть от структуры СС (количество и вес путей, соединяющих две вершины, наличие циклов и их вес). Обоснование этого правила на математическом уровне строгости и детальное описание его использования приведены в [17]. Здесь мы ограничимся эвристическим уровнем изложения.

Обозначим первоначальный граф через A , его матрицу смежности – через $\{a_{ij}\}$. Далее построим орграф \hat{A} с матрицей смежности $\{\alpha_{ij}\}$, который состоит из тех вершин $\{A_i, i = 1, \dots, m\}$ первоначального графа A , которые не являются входными. Соответствующие ребра графа A сохраняются и в графе \hat{A} , но, кроме того, дополнительно, ввиду соотношений (3) значения $\alpha_{ii}, i = 1, \dots, m$, вообще говоря, окажутся не нулевыми, то есть каждая вершина \hat{A} соединена сама с собой, представляя собой, таким образом, цикл. Наконец, рассмотрим орграф \hat{A}_{i+} , который отличается от \hat{A} тем, что вершина A_i соединена со всеми остальными вершинами, даже если соответствующей связи не было в графе \hat{A} . Из последующего будет ясно, что значения весов этих новых ребер не важны, важно только наличие связи.

Для того, чтобы определить коэффициенты F_{il} , которые характеризуют степень влияния входной вершины \bar{A}_l на другую вершину A_i , необходимо воспользоваться следующим Правилom.

ПРАВИЛО. Построим граф \hat{A}_{i+} из графа \hat{A} . Найдем все разбиения на циклы вершин графа \hat{A}_{i+} . По крайней мере, одно разбиение всегда существует, т.к. в соответствии со структурой графа \hat{A} каждая его вершина представляет собой цикл. Коэффициент F_{ii} будет равен сумме мономов весов, каждый из мономов соответствует одному разбиению на циклы. Веса мономов конструируются в два шага: 1) перемножаются веса всех ребер, входящих в данное разбиение на циклы, и этому моному присваивается знак, равный $(-1)^{m+L}$, где m – число вершин в графе \hat{A}_{i+} , а L – число циклов в рассматриваемом разбиении; 2) в полученном мономе определяется цикл, содержащий вершину A_i , и значения α_{is} заменяются значениями a_{is} из матрицы смежности первоначального графа A .

Описанный алгоритм позволяет определять степени влияния входных вершин на другие на основе топологии орграфа и понимать, какие входные факторы СС более важны для других факторов. В следующем разделе мы проиллюстрируем характер возможного анализа при помощи понятия степени влияния на нескольких простых примерах.

2. Простые примеры использования характеристики степени влияния. Конкретное приложение описанной выше методики было рассмотрено в [18] на примере влияния распространения вирусной инфекции на модельную социально-экономическую среду. Другое применение для российской экономической структуры содержится в [19]. В этом разделе мы рассмотрим еще два примера простых моделей, касающихся вопросов энергетики и геополитики. На рисунках ниже круги изображают входные факторы, а прямоугольники – другие факторы (отражают элементы функционирования СС, часть может рассматриваться как целевые факторы). Все наборы весов получены при помощи экспертных оценок.

2.1. Глобальная энергетическая система. Вначале рассмотрим модельную систему, связанную с мировой энергетикой, рис. 1. Обозначения: 1 ВВП – фактор экономического развития, характеризуемого ростом ВВП; 2 ППЭ – потребление первичной (непосредственно извлекаемой из окружающей природы) энергии; 3 СПЭ – спрос на первичную энергию; 4 ЧН – численность населения; 5 ФК – факторы качества, отражают не так давно возникшие требования использования чистой, «зеленой», энергии; 6 ВШ – внешний шок, например, эпидемия коронавируса, который ведет к резкому сокращению потребления первичной энергии в краткосрочной перспективе. Система, представленная на рис. 1, является довольно простой, соответствующий граф \hat{A} , в дополнение к тривиальному разбиению на циклы (всегда существующему и состоящему из совокупности циклов каждой вершины

\hat{A}), имеет только одно разбиение, которое включает все вершины \hat{A} . Табл. 1 содержит результаты расчетов нормализованной степени влияния для нескольких вариантов значений весов ребер, которые характеризуют различные состояния глобальной энергетической системы.

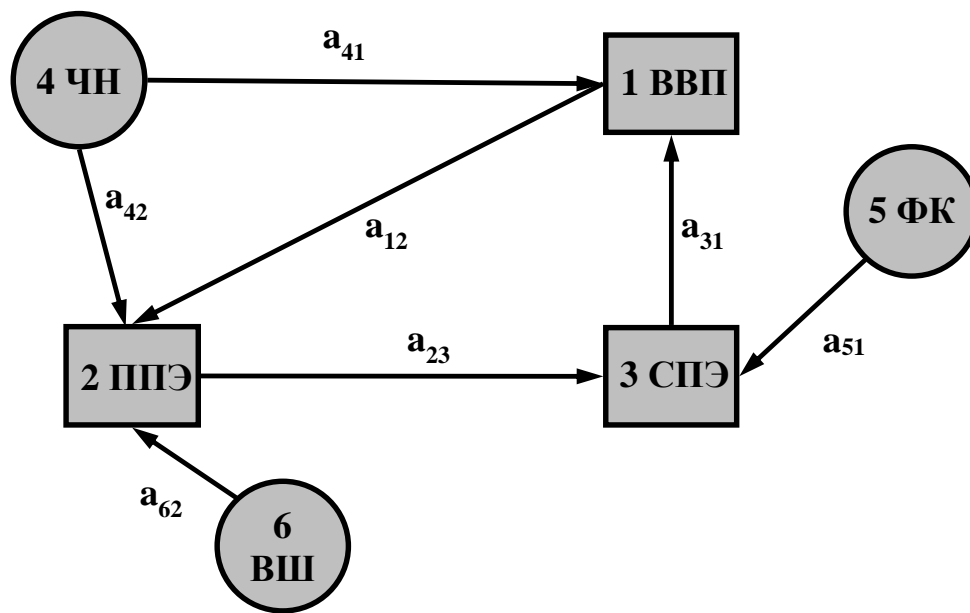


Рис. 1. Основные факторы глобальной энергетической системы

Для энергетической системы конца XX века основное влияние на внутренние компоненты системы оказывает фактор 4 ЧН, т.е. необходимость удовлетворения потребностей растущего населения в энергии. Степень влияния на все три внутренних фактора примерно одинакова, что обеспечивает сбалансированность системы, в частности баланс спроса и предложения энергии.

Таблица 1. Нормализованная степень влияния факторов в системе глобальной энергетики

• Энергосистема конца XX века: $a_{31}=0,5$; $a_{41}=0,5$; $a_{12}=0,7$; $a_{42}=0,3$; $a_{62}=0$; $a_{23}=0,9$; $a_{53}=0,1$				
•	• 4 ЧН	• 5 ФК	• 6 ВШ	
• 1 ВВП	• 0.977	• 0.077	• 0	
• 2 ППЭ	• 1.000	• 0.054	• 0	
• 3 СПЭ	• 0.900	• 0.154	• 0	
• «Зеленая» энергосистема: $a_{31}=0,5$; $a_{41}=0,5$; $a_{12}=0,7$; $a_{42}=0,3$; $a_{62}=0$; $a_{23}=0,5$; $a_{53}=0,5$				
•	• 4 ЧН	• 5 ФК	• 6 ВШ	
• 1 ВВП	• 0.885	• 0.385	• 0	
• 2 ППЭ	• 1.000	• 0.269	• 0	
• 3 СПЭ	• 0.500	• 0.769	• 0	
• «Зеленая» энергосистема и внешний шок: $a_{31}=0,5$; $a_{41}=0,5$; $a_{12}=0,2$; $a_{42}=0,3$; $a_{62}=0,5$; $a_{23}=0,5$; $a_{53}=0,5$				
•	• 4 ЧН	• 5 ФК	• 6 ВШ	
• 1 ВВП	• 1.000	• 0.435	• 0.217	
• 2 ППЭ	• 0.696	• 0.087	• 0.870	
• 3 СПЭ	• 0.348	• 0.870	• 0.435	

В современных условиях («зеленая» энергетическая система) фактор 5 ФК заметно увеличивает свое влияние, что отражает тенденцию к усиленному развитию новой, в частности возобновляемой, энергетики. В этой ситуации нарушается баланс спроса и

предложения энергии. Рост населения, как таковой, не обеспечивает предложения, эквивалентного спросу. Необходимо учитывать фактор качества, который оказывает более сильное влияние на спрос, чем население, то есть может возникнуть ситуация превышения спроса над предложением и наоборот, что может привести к заметным колебаниям цен. В целом система получается нестабильной, но с возможностью регулирования ее поведения путем поиска правильной комбинации входных факторов. Когда к системе добавляется внешний шок, численность населения наиболее сильно влияет на потребность в развитии экономики в целом (фактор 1 ВВП). Спрос и предложение на энергию снова находятся в дисбалансе, и чтобы сбалансировать эти факторы, необходимо повлиять на внешний шок (фактор 6 ВШ), чтобы скорректировать спрос, и на развитие «зеленой» энергетики (фактор 5 ФК), чтобы скорректировать предложение. В то же время становится желательным замедлить рост населения (фактор 4 ЧН).

2.2. Система геополитического равновесия. Теперь кратко рассмотрим систему геополитического равновесия, рис. 2. Здесь важной особенностью является наличие петель у игроков; веса петель характеризуют уровень самодостаточности игрока в проведении собственной политики. Обозначения: 1 Си – фактор сильного геополитического игрока (высокий уровень самодостаточности – вес близок к 1); 2 Ср – фактор геополитического игрока средней силы; 3 Сл – слабый геополитический игрок; 4 ЭБ – фактор существования режима экономического благоприятствования; 5 Рес – фактор доступности сырьевых ресурсов.

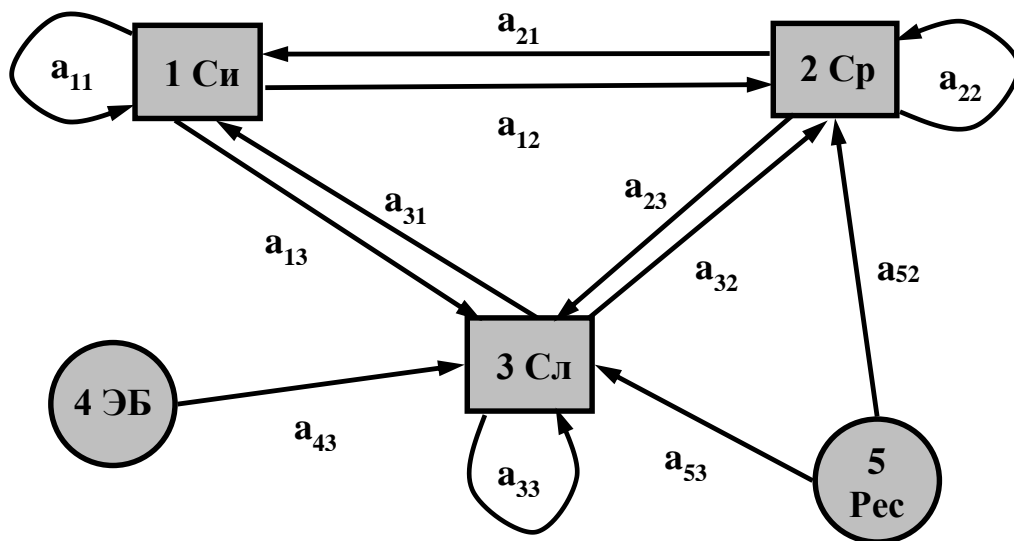


Рис. 2. Схема конфронтации трех геополитических сил

Граф \hat{A} системы на рис. 2 представляет собой полный граф из трех элементов и содержит три разбиения на циклы, в дополнение к тривиальному разбиению. В табл. 2 ниже представлен вариант весов ребер, который характеризует некоторую абстрактную геополитическую систему.

Таблица 2. Нормализованная степень влияния факторов в схеме геополитического равновесия

<ul style="list-style-type: none"> $a_{11}=0,85$; $a_{21}=0,1$; $a_{31}=0,05$; $a_{22}=0,15$; $a_{12}=0,2$; $a_{32}=0,05$; $a_{52}=0,6$; $a_{33}=0,05$; $a_{13}=0,1$; $a_{23}=0,05$; $a_{43}=0,4$; $a_{53}=0,4$ 		
	<ul style="list-style-type: none"> 4 ЭБ 	<ul style="list-style-type: none"> 5 Рес
<ul style="list-style-type: none"> 1 Си 	<ul style="list-style-type: none"> 0.212 	<ul style="list-style-type: none"> 0.866

• 2 Ср	• 0.078	• 1.000
• 3 Сл	• 0.480	• 0.598

Кратко опишем расчетное распределение влияния в системе на рис. 2. Как сильный, так и слабый игрок существенно зависят от баланса обоих входных факторов, зависимость сильного игрока от фактора экономического благоприятствования (4 ЭБ) заметно меньше, чем у слабого игрока. Наиболее стабильное положение у среднего игрока, который зависит в основном только от фактора сырьевых ресурсов (5 Рес), наименее стабильное положение у слабого игрока, для которого совокупность каждого из рассматриваемых входных факторов может привести к серьезным последствиям.

3. Вариационный подход для систем законов сохранения. При моделировании социально-экономической системы структура макроуровня может быть отражена, например, с помощью описанного варианта метода НКК, но, в соответствии с ситуацией, описанной во Введении, мы предполагаем, что необходимо более детально отразить определенные конкретные элементы, особенно для элементов, отвечающих за описание технологических процессов. Часто метод решения дифференциальных уравнений является подходящей методологией. Здесь мы остановимся на одном из популярных представителей – квазилинейных системах СЗС. Решать такие системы методом НС удобно из-за наличия в настоящее время большого количества данных [20] и потому, что это позволяет включить такое решение в общую схему использования НКК и создать единую методологию моделирования совокупной социально-экономической системы. Одной из характерных особенностей решений квазилинейных СЗС является появление особенностей в решениях. Соответствующий НС метод должен учитывать это. Для этого выведем такую функцию ошибки, чтобы она учитывала возможные особенности решения.

Рассмотрим задачу Коши для системы многомерных квазилинейных уравнений общего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{F}_j(\mathbf{U}(t, \mathbf{x}))) = 0 \quad , \quad \mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad (5)$$

$$\text{где } (t, \mathbf{x}) \in \Pi_T \equiv \{(t, \mathbf{x}) : (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m\}, \quad \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) = (u_1(t, \mathbf{x}), \dots, u_n(t, \mathbf{x})),$$

$$(t, \mathbf{x}) \equiv (t, x_1, \dots, x_m), \quad \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

и $\mathbf{F}_j = (f_{1j}, \dots, f_{nj})$ есть достаточно гладкие вектор-функции переменных (u_1, \dots, u_n) . Здесь и далее векторные величины в формулах будут выделены жирным шрифтом. Кроме того, многомерные интегралы по пространствам многих переменных и по поверхностям в этих пространствах будут записываться как одинарные или двойные интегралы, чтобы сократить запись, если это не приводит к двусмысленности.

Ввиду возможности присутствия разрывов в системе (5) ее решения понимаются в обобщенном смысле, т.е. должно выполняться следующее интегральное тождество:

$$\iint_{\Pi_T} \left[\mathbf{U} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \mathbf{F}_j(\mathbf{U}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{U}_0 \varphi(0, \mathbf{x}) dx = 0 \quad (6)$$

для всех бесконечно дифференцируемых $\varphi(t, \mathbf{x})$ с компактным носителем по пространственным переменным. Пусть $\mathbf{U}(t, \mathbf{x})$ является непрерывно дифференцируемой функцией за исключением некоторой гиперповерхности $\Omega \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ коразмерности 1 с вектором внешней нормали (n_0, n_1, \dots, n_m) . Предположим также, что вдоль этой гиперповерхности $\mathbf{U}(t, \mathbf{x})$ имеет разрыв и вдоль Ω определены значения $\mathbf{U}^\pm = \mathbf{U}(t, \mathbf{x} \pm 0)$.

Тогда для того, чтобы удовлетворялось (5) в смысле (6), должны выполняться соотношения Ренкина-Гюгонио

$$(U^- - U^+)n_0 + \sum_{j=1}^m (F_j(U^-) - F_j(U^+))n_j = 0. \quad (7)$$

Дополнительно, для обеспечения единственности решений (5), должно еще выполняться какое-либо энтропийное условие, но мы не будем на этом здесь останавливаться.

Подход, который будет кратко описан ниже, также представлен в [21]. Вначале рассмотрим одномерный случай. Пусть $m=1$, рассмотрим вместо функции $U(t, x)$ функционал $J: \chi(\tau) \in C_X^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C_X^1 \equiv C^1([0, T], [-X, X])$

$$J \equiv \int_0^T L(\dot{\chi}, U) d\tau; L(\dot{\chi}, U) \equiv U(\tau, \chi(\tau))\dot{\chi}(\tau) - F \circ U(\tau, \chi(\tau)). \quad (8)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $U(t, x)$ принадлежит к некоторому удобному классу функций, пусть $\chi_{extr}(t) \in C_X^1$ есть такая траектория, что вдоль нее $\delta J = 0$. Тогда в тех точках $x = \chi_{extr}(t)$, где $U(t, x)$ является гладкой, система (5) удовлетворяется в классическом смысле, в других случаях выполнено соотношение Ренкина-Гюгонио (7), $m=1$. Более того, выражение $\delta^2 J$ вдоль $x = \chi_{extr}(t)$ содержит только члены с $(\delta\chi)^2$ (квадратичная форма не содержит члены с $\delta\dot{\chi}$).

Теперь модифицируем функционал J . Рассмотрим функцию $V(t, x) \equiv \int^x U(t, p) dp$ и функционал $I: \chi(\tau) \in C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$I \equiv \int_0^T M(U)(\tau, \chi(\tau)) d\tau \equiv \int_0^T \left[\frac{\partial V}{\partial \tau}(\tau, \chi(\tau)) + F \circ U(\tau, \chi(\tau)) \right] d\tau. \quad (9)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $U(t, x)$ принадлежит к некоторому удобному классу функций, пусть вдоль $\chi_{extr}(t) \in C([0, T], \mathbb{R})$ выполнено $\delta I = 0$. Тогда в тех точках $x = \chi_{extr}(t)$, где $U(t, x)$ является гладкой, система (5) удовлетворяется в классическом смысле, в других случаях выполнено соотношение Ренкина-Гюгонио (7), $m=1$. Более того, свойство $\delta I = 0$ влечет непрерывность функции $M(U)$ на разрывах $U(t, x)$, а величина $\delta^2 I$ определяется скачком $\partial M(U) / \partial \tau$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для обобщенных решений $U(t, x)$ системы (5) функция $M(U)$ является непрерывной и не зависит от x .

Таким образом, для того, чтобы найти обобщенное решение (5), достаточно найти такую $U(t, x)$ (удовлетворяющую начальным условиям), что выражение

$$\sup_r \{V_a^b(M \circ U(t, x))\} \quad (10)$$

принимает свое минимальное значение. Здесь $V_a^b(W)$ обозначает вариацию функции $W(t, x)$ по x , $x \in [a, b]$. Функция (10) и является желаемой функцией ошибки; мы рассматриваем вариацию непрерывной функции даже для разрывных решений. Обычно в качестве функции ошибки вычисляется выражение $\partial U / \partial t + \partial F(U) / \partial x$ (возведенное в квадрат или взятое по модулю и т.д.). Однако прямое вычисление производных, включенных в эту функцию ошибки, приводит к появлению дельтаобразных членов (поскольку в решении есть скачки),

балансировка которых может быть нетривиальной задачей. Поэтому удобно использовать выражение (10) в качестве функции ошибки. Функция $M \circ U(t, x)$, включенная в (10), не имеет скачков, и ее аппроксимация, так или иначе, может быть дифференцирована, что повышает регулярность функции ошибки.

В многомерном случае, даже и в двумерном, поведение обобщенных решений системы (5) выглядит гораздо сложнее. Тем не менее, описанный выше метод допускает обобщение и для многих пространственных переменных, которое мы проиллюстрируем на примере двумерного варианта системы (5), т.е. при $m = 2$, $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, F_1 \equiv F, F_2 \equiv G$.

Пусть для простоты у функции $U(t, x, y)$ имеется единственная непрерывно дифференцируемая поверхность разрыва Ω . Рассмотрим другую «тестовую» поверхность S , пересекающую Ω и заданную в виде $S(\tau, s) \equiv (t = \tau, x = \chi(\tau, s), y = \gamma(\tau, s))$, где s некоторый внутренний параметр. Введем функционал $J : S(\tau, s) \in C^1([0, T] \times [0, 1], \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^n$, являющийся обобщением (8),

$$J \equiv \iint_S U dx \wedge dy + F(U) dy \wedge dt + G(U) dt \wedge dx. \quad (11)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $U(t, x, y)$ принадлежит к некоторому удобному классу функций, и пусть непрерывно дифференцируемая поверхность S такова, что $\delta J = 0$ вдоль нее. Тогда в тех точках S , где $U(t, x, y)$ является гладкой, система (5) удовлетворяется в классическом смысле, в других случаях выполнено соотношение Ренкина-Гюгонио (7), $m = 2$.

Наконец, рассмотрим обобщение (9). Обозначим $V_1(t, x, y) \equiv \int^x U(t, \omega, y) d\omega$, $V_2(t, x, y) \equiv \int^y U(t, x, \omega) d\omega$ и

$$\begin{aligned} \Phi(t, x, y) &\equiv \frac{\partial}{\partial t} V_1 + F \left(\frac{\partial}{\partial x} V_1 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \int^x G \left(\frac{\partial}{\partial s} V_1(t, s, y) \right) ds, \\ \Psi(t, x, y) &\equiv \frac{\partial}{\partial t} V_2 + G \left(\frac{\partial}{\partial y} V_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \int^y F \left(\frac{\partial}{\partial s} V_2(t, x, s) \right) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Для обобщенных решений системы (5), $m = 2$, функция $\Phi(t, x, y)$ непрерывна и не зависит от x , а функция $\Psi(t, x, y)$ непрерывна и не зависит от y .

Функции (12) могут служить ориентиром для построения вариационных формулировок в двумерном случае, а также для поиска представления функционала (11). Свойства постоянства функций (12), то есть минимальности соответствующих вариаций, могут быть использованы при разработке численных алгоритмов для (5) на основе НС подходов.

Заключение. Таким образом, в данном исследовании рассматривается возможность создания подходов к единой методологии моделирования и построения информационной системы для СС, которые включают как слабо структурированные (например, социально-экономические подсистемы при недостатке информации), так и хорошо структурированные (например, модели конкретных физических процессов на уровне предприятия в структуре города или целой экономики) подсистемы. Для достижения такой цели предлагается использовать среду моделирования, представляющую из себя сложную НС, которая допускает в своем составе разнообразные циклы. Рассмотрена модификация технологии НКК для моделирования слабо структурированных подсистем с точки зрения более свободных и общих

принципов, чем это принято в большинстве современных исследований. Эта модификация учитывает топологию орграфа и заданную на нем вычислительную процедуру, позволяя рассматривать НКК как особый вид НС. Рассматривается только одна из многих возможных характеристик – степень влияния входных вершин – и только в относительно простой ситуации линейности основных соотношений. Представляется, что для рассмотрения сложных систем, содержащих сотни, а может быть, и тысячи элементов, такая более свободная интерпретация НКК будет полезна.

С другой стороны, включение уравнений в частных производных (а именно квазилинейных СЗС) в среду моделирования позволяет работать с конкретными элементами НКК, которые представляют собой, например, конкретные технологические процессы, используемые на предприятиях. В последнее время для решения таких систем уравнений активно используют методы искусственного интеллекта, в частности методы НС, несмотря на то, что было разработано большое количество эффективных разностных методов. Это связано с тем, что НС методы хорошо соответствуют методам работы с большими данными, которые теперь могут быть получены непосредственно из экспериментов или тестов. Предлагаемая вариационная постановка задачи нахождения обобщенных решений для квазилинейных гиперболических систем уравнений дает возможность построить специальную функцию ошибки, учитывающую особенности в решениях; таким образом, эта функция ошибки представляется более предпочтительной. Интересным фактом является также то, что такой подход имеет аналог в многомерном случае.

Возможность включения других известных технологий моделирования СС в описанную выше схему не рассматривалась. Это может составить предмет дальнейших исследований.

Благодарности. Автор благодарит А.И. Аптекарева, Б.Н. Четверушкина и В.П. Осипова за полезные обсуждения.

Список источников

1. Forrester J.W. Industrial dynamics. J.W. Forrester, M.I.T. Press, 1961, 464 p.
2. Геловани В.А. Исследование влияния управления на глобальную модель Форрестера, в кн. Проблемы кибернетики, вып. 31 / В.А. Геловани, В.А. Егоров, В.Б. Митрофанов [и др.] // М.: Наука, 1976. – С. 187-224.
3. Фрисман Е.Я. Системная динамика регионального развития: подходы к моделированию блока экономики / Е.Я. Фрисман, М.Ю. Хавинсон, С.В. Аносова [и др.] // *Пространственная экономика*, 2007. – № 3. – С. 134-146.
4. Резчиков А.Ф. Анализ и прогнозирование характеристик безопасности авиационных транспортных систем на основе уравнений системной динамики / А.Ф. Резчиков, В.А. Кушников, В.А. Иващенко [и др.] // *Управление большими системами*, 2016. – Вып. 64. – С. 27-48.
5. Kosko B. Fuzzy cognitive maps. *International journal of man-machine studies*, 1986, v.24, pp. 65-75.
6. Bakhtavar E., Valipour M. et al. Fuzzy cognitive maps in systems risk analysis: a comprehensive review. *Complex & Intelligent Systems*, 2021, v.7, pp. 621-637.
7. Четверушкин Б.Н. Факторная модель для исследования сложных процессов / Б.Н. Четверушкин, В.А. Судаков // *Доклады РАН*, 2019. – т. 489, № 1. – С. 17-21.
8. Федулов А.С. Модели системной динамики на основе нечетких реляционных когнитивных карт / А.С. Федулов, В.В. Борисов // *Системы управления, связи и безопасности*, 2016. – №. 1. – С. 66-80.
9. Groumpou P.P. Using fuzzy cognitive maps in analyzing and studying international economic and political stability. *IFAC PapersOnLine*, 2019, v. 52(25), pp. 23-28.
10. Papageorgiou K., Singh P.K., Papageorgiou E. et al. Fuzzy cognitive map-based sustainable socio-economic development planning for rural communities. *Sustainability*, 2020, v. 12(1), pp. 305.
11. Salmeron J.L., Palos-Sanchez P.R. Uncertainty propagation in fuzzy grey cognitive maps with Hebbian-like learning algorithms. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, v.49, no 1, pp. 211-220.
12. Заграновская А.В. Системный анализ на основе нечетких когнитивных карт / А.В. Заграновская // *Вестник РЭУ им. Г.В. Плеханова*, 2018. – №. 4. – С. 152-160.
13. Dafermos C.M. Conservation laws in continuum physics, Volume 325 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Berlin.: Springer-Verlag, 2016, 826 p.

14. Hesthaven J.S. Numerical Methods for Conservation Laws: From Analysis to Algorithms. Philadelphia.: SIAM, 2018, 576 p.
15. Tarkhov D., Vasilyev A. Semi-empirical neural network modeling and digital twins development. Cambridge, Massachusetts: Academic Press, 2020, 288 p.
16. Радкевич Е.В. Введение в обобщённую теорию неравновесных фазовых переходов и термодинамический анализ задач механики сплошной среды / Е.В. Радкевич, Е.А. Лукашев, Н.Н. Яковлев [и др] // М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2019. – 349 с.
17. Osipov V.P., Rykov Yu.G. On mathematical aspects of analyzing the structure of complex systems using weighted digraphs. Lobachevskii J Math, 2020, v.41, no. 11, pp. 2231-2238.
18. Осипов В.П. Математические аспекты понятия влияния в концепции когнитивного моделирования / В.П. Осипов, Ю.Г. Рыков, Б.Н. Четверушкин // Искусственный интеллект и принятие решений, 2021. – № 2. – С. 3-10.
19. Dranko O.I., Rykov Yu.G., Karandeev A.A. Structural analysis of large-scale socio-technical systems based on the concept of influence. IFAC-PapersOnline, 2021, v. 54, Issue 13, pp. 738-743.
20. Michoski C., Milosavljevic M., Oliver T. and Hatch D.R. Solving differential equations using deep neural networks. Neurocomputing, 2020, v. 399, pp. 193-212.
21. Rykov Yu.G. On the systems of conservation laws and on a new way to construct for them neural networks algorithms. Lobachevskii J Math, 2021, v. 42, no. 11, pp. 2642-2650.

Рыков Юрий Германович. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. AuthorID: 6602529933, SPIN: 3544-2509, ORCID: 0000-0003-1695-6202, rykov@keldysh.ru, 125047, Москва, Миусская пл., 4.

UDC 519.876

DOI: 10.38028/ESI.2022.28.4.019

On the development of a hybrid analytical approach to modeling complex systems containing both weakly structured and well-structured subsystems

Yuri G. Rykov

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS,
Russia, Moscow, rykov@keldysh.ru

Abstract. Currently, the methodology of artificial intelligence is gaining more and more applications. Neural networks (NN) attract a lot of attention. One of the main reasons for this is that the NN technology is, in a sense, universal. On the other hand, some other computer technologies, having the nature of artificial intelligence or others, also have the properties of universality. In the context of this article, these are technologies of fuzzy cognitive maps (FCM) and special systems of partial differential equations, so called “systems of conservation laws” (CL). All the approaches just mentioned are used to develop models of complex systems (CS), i.e. aggregates of a large number of elements with connections between them of various types. The specificity of the CL theory, which is able to model joint balances of various quantities on the level of physical processes, lies in the presence of nonlinear effects, such as the formation of singularities in solutions. The FCM technology allows for an extension of the original concept by B. Kosko with a wider range of interpretation. The article provides an illustration of how these technologies can be combined into a single methodology for creating a modeling medium for the CS based on the NN approach.

Keywords: complex systems, computer science, modeling media, fuzzy cognitive maps, weighted digraph, graph partitioning by cycles, conservation laws, variational representation, neural networks for conservation laws

Acknowledgements: The author is grateful to A.I. Aptekarev, B.N. Chetverushkin and V.P. Osipov for useful discussions.

References

1. Forrester J.W. Industrial dynamics. J.W. Forrester, M.I.T. Press, 1961, 464 p.
2. Gelovani V.A., Egorov V.A., Mitrophanof V.B., Piontkovski A.A. Issledovanie vliyaniya upravleniya na global'nuj model' Forestera [Investigation of the influence of management on the global Forrester model]. Problemy kibernetiki [Problems of cybernetics], 1976, v. 31, pp. 187-224.

3. Frisman E.Ya., Havinson M.Yu., Anosova S.V. et al. Sistemnaya dinamika regional'nogo razvitiya: podhody k modelirovaniyu bloka ekonomiki [Systemic dynamics of regional development: approaches to modeling the economic block]. Prostranstvennaya ekonomika [Spatial economy], 2007, no. 3, pp. 134-146.
4. Rezchikov A.F., Kushnikov V.A., Ivaschenko V.A. et al. Analiz i prognozirovanie harakteristik bezopasnosti aviacionnykh transportnykh system na osnove uravnenij sistemnoi dinamiki [Analysis and prediction of safety characteristics of aviation transport systems based on system dynamics equations]. Upravlenie bol'shimi sistemami [Large-scale systems control], 2016, v. 64, pp. 27-48.
5. Kosko B. Fuzzy cognitive maps. International journal of man-machine studies, 1986, v.24, pp. 65-75.
6. Bakhtavar E., Valipour M. et al. Fuzzy cognitive maps in systems risk analysis: a comprehensive review. Complex & Intelligent Systems, 2021, v.7, pp. 621-637.
7. Chetverushkin B.N., Sudakov V.A. Faktornaya model dlya issledovaniya slozhnykh processov [Factor model for the study of complex processes]. Doklady RAN [RAS reports], 2019, v.489, no. 1, pp. 17-21.
8. Fedulov A.S., Borisov V.V. Modeli sistemnoi dinamiki na osnove nechetkih relyacionnykh kognitivnykh kart [Models of system dynamics based on fuzzy relational cognitive maps]. Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti [Systems of Control, Communication and Security], 2016, no. 1, pp. 66-80.
9. Groumpos P.P. Using fuzzy cognitive maps in analyzing and studying international economic and political stability. IFAC PapersOnLine, 2019, v. 52(25), pp. 23-28.
10. Papageorgiou K., Singh P.K., Papageorgiou E. et al. Fuzzy cognitive map-based sustainable socio-economic development planning for rural communities. Sustainability, 2020, v. 12(1), 305 p.
11. Salmeron J.L., Palos-Sanchez P.R. Uncertainty propagation in fuzzy grey cognitive maps with Hebbian-like learning algorithms. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, v.49, no. 1, pp. 211-220.
12. Zagranovskaya, A.V. Systemnyi analiz na osnove nechetkih kognitivnykh kart [System analysis based on fuzzy cognitive maps]. Vestnik REU im. I.G. Plekhanova [Vestnik of the Plekhanov RUE], 2018, v. 4, pp. 152-160.
13. Dafermos C.M. Conservation laws in continuum physics, Volume 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Berlin, Springer-Verlag, 2016, 826 p.
14. Hesthaven J.S. Numerical methods for conservation laws: from analysis to algorithms. Philadelphia, SIAM, 2018, 576 p.
15. Tarkhov D. and Vasilyev A. Semi-empirical neural network modeling and digital twins development. Cambridge, Massachusetts, Academic Press, 2020, 288 p.
16. Radkevich E.V., Lukashov E.A., Yakovlev N.N. [et al.]. Vvedenie v oboshennuju teoriyu neravnovesnykh fazovykh perehodov I termodinamicheskii analiz zadach mekhaniki sploshnoi sredy [Introduction to the generalized theory of non-equilibrium phase transitions and thermodynamic analysis of solid environment mechanics tasks]. Moscow, MGU im. Lomonosov MGU [Moscow, Lomonosov Moscow State University], 2019, 349 p.
17. Osipov V.P., Rykov Yu.G. On mathematical aspects of analyzing the structure of complex systems using weighted digraphs. Lobachevskii J Math., 2020, v.41, no. 11, pp. 2231-2238.
18. Osipov V.P., Rykov Yu.G., Chetverushkin B.N. Matematicheskie aspekty ponyatiya vliyaniya v koncepcii kognitivnogo modelirovaniya [Mathematical Aspects of the Concept of Influence in the Cognitive Simulations]. Artificial Intelligence and Decision Making, 2021, no. 2, pp. 3-10.
19. Dranko O.I., Rykov Yu.G., Karandeev A.A. Structural analysis of large-scale socio-technical systems based on the concept of influence. IFAC-PapersOnline, 2021, v. 54, Issue 13, pp. 738-743.
20. Michoski C., Milosavljevic M., Oliver T. and Hatch D.R. Solving differential equations using deep neural networks. Neurocomputing, 2020, v. 399, pp. 193-212.
21. Rykov, Yu.G. On the systems of conservation laws and on a new way to construct for them neural networks algorithms. Lobachevskii journal of mathematics, 2021, v. 42, no. 11, pp. 2642-2650.

Yuri Germanovich Rykov. *Candidate of Physical and Mathematics, Senior Researcher at the Institute of Applied Mathematics named after M.V. Keldysh RAS. AuthorID: 6602529933, SPIN: 3544-2509, ORCID: 0000-0003-1695-6202, rykov@keldysh.ru, 125047, Moscow, Mius square, 4.*

Статья поступила в редакцию 14.07.2022; одобрена после рецензирования 22.11.2022; принята к публикации 25.11.2022.

The article was submitted 07/14/2022; approved after reviewing 11/22/2022; accepted for publication 11/25/2022.