

Математическое моделирование и его применение

УДК 621.311.001.57

DOI:10.38028/ESI.2022.27.3.014

Метод динамических расчетов элементов теплоэнергетических установок, сводящий решение систем дифференциальных уравнений в частных производных к решению задач линейного программирования

Клер Александр Матвеевич, Апанович Данил Владимирович

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,

Россия, Иркутск, dvapan@gmail.com

Аннотация. Расчеты динамических процессов в элементах теплоэнергетических установок (теплообменники, камеры сгорания, турбомашин и др.) необходимы для обоснования допустимых и оптимальных режимов работы, выбора конструктивных характеристик элементов, оценки их надежности и т. д. Эти задачи сводятся к решению систем уравнений в частных производных. В настоящее время для таких расчетов в основном используются метод конечных разностей и метод конечных элементов. Эти методы громоздки и сложны. В статье предлагается метод, основная идея которого заключается в сведении решения указанных систем уравнений к решению задач линейного программирования. Работа метода демонстрируется на примере теплообменника периодического действия.

Ключевые слова: численные методы, дифференциальные уравнения в частных производных, линейное программирование, динамические процессы

Цитирование: Клер А.М. Метод динамических расчетов элементов теплоэнергетических установок, сводящий решение систем дифференциальных уравнений в частных производных к решению задач линейного программирования / А.М. Клер, Д.В. Апанович // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2022. – № 3(27). – С. 148-161. – DOI:10.38028/ESI.2022.27.3.014.

Введение. Расчеты стационарных и нестационарных режимов работы ряда элементов теплоэнергетических установок (теплообменников различных типов, топок, камер сгорания, турбинных ступеней и др.) сводятся к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных (СДУЧП). Основными методами решения таких систем являются методы конечных разностей (МКР), методы контрольных объемов (МКО) и методы конечных элементов (МКЭ).

При использовании МКР на расчетной области строится сетка и для каждого ее узла, на основе исходных дифференциальных уравнений, формируется подсистема алгебраических уравнений [1-4]. В этих уравнениях частные производные заменяются соответствующими конечными разностями. Подсистемы алгебраических уравнений отдельных узлов сетки объединяются в единую систему алгебраических уравнений, к которой добавляются краевые условия. Следует отметить, что при этом точность решения СДУЧП сильно зависит от величин шагов сетки по пространственным координатам и по времени. Стремление поднять точность решения приводит к сокращению размеров шагов и соответственно к увеличению числа узлов сетки и размерности системы алгебраических уравнений. Во многих случаях эта размерность становится столь большой, что система не может быть решена как единое целое без использования тех или иных методов декомпозиции. Снижения размерности системы можно добиться использованием сетки с переменными шагами, но это сильно усложняет алгоритм решения задачи, что особенно ощутимо для расчетного пространства со сложной геометрией.

МКО применим к задачам, в которых дифференциальные уравнения отражают законы сохранения массы (полной или отдельных химических элементов), энергии и импульса [3-5]. К таким задачам относятся большинство задач тепломассообмена. Поэтому данный метод наиболее широко используется в вычислительной гидрогазодинамике. В соответствии с МКО

расчетная область разбивается на контрольные объемы, для которых допустима неправильная геометрическая форма. Для каждого объема формируются балансовые уравнения, учитывающие обмен данного объема с соседними объемами массой, энергией и импульсом. Эти уравнения являются алгебраическими. В них производные заменяются на конечные разности, определяемые по значениям соответствующих параметров в геометрических центрах смежных контрольных объемов. Кроме того, в уравнения входят площади граничных поверхностей между смежными контрольными объемами, причем балансы массы, энергии и импульса соблюдаются для контрольных объемов вне зависимости от места расположения разделяющих смежные объемы поверхностей. МКО позволяют более точно и более просто, чем МКР, представить сложную расчетную область. К недостаткам как МКР, так и МКО, следует отнести невозможность расчета искомых переменных в точках, не являющихся узлами сетки или центрами контрольных объемов.

МКЭ первоначально предназначались для статических расчетов строительных конструкций [6-8]. Они основаны на разбиении расчетной области на достаточно большое число конечных элементов простой формы, как правило, многогранников. На каждом элементе выделяются узлы. В первую очередь это вершины многогранников, однако, возможен выбор в качестве узлов и других точек. Для каждого элемента для всех искомого из системы дифференциальных уравнений функций ищутся линейные комбинации заранее заданных базисных функций, связывающие пространственные координаты и время с соответствующей искомой переменной. Совокупность таких комбинаций для всех элементов должна отвечать следующим условиям: достигается минимум суммы квадратов невязок для всех узлов всех конечных элементов (невязки получаются при подстановке в дифференциальные уравнения нужных производных соответствующих линейных комбинаций базисных функций); равенство искомого переменных в вершинах смежных элементов при определении их из линейных комбинаций базисных функций этих элементов; равенство расчетных краевых условий при определении их на основе соответствующих линейных комбинаций базисных функций. Следует отметить, что при согласованном подборе числа конечных элементов, числа узлов в элементах и числа базисных функций можно добиться того, что невязки в узлах элементов при соблюдении указанных условий окажутся равными нулю, т.е. минимума достигает сумма квадратов невязок. При этом количество невязок должно быть равно количеству искомого коэффициентов линейных разложений базисных функций. Указанные условия порождают систему алгебраических уравнений, решение которой дает линейные комбинации базисных функций, позволяющие определить искомые переменные в любой точке расчетной области, что является несомненным достоинством МКЭ. Следует отметить, что если исходная СДУЧП линейная, то и системы алгебраических уравнений, к которым сводится приближенное решение СДУЧП, будут линейными.

При решении многих нестационарных задач с использованием МКР, МКО и МКЭ получают системы алгебраических уравнений большой размерности и для их решения используются методы декомпозиции, состоящие, как правило, в разделении решения по пространственным координатам и по времени. Выделяется подсистема уравнений, относящаяся к одному моменту времени. После ее решения находятся частные производные искомого величин по времени. С использованием этих производных определяются значения соответствующих величин в следующий момент времени (на следующем временном слое). При этом используются различные явные и неявные разностные схемы [9].

В рассмотренных методах условием малого отклонения приближенного решения СДУЧП от ее точного решения является малость величин характерных геометрических размеров (шаги сетки, максимальные размеры контрольных объемов и конечных элементов).

Наиболее обоснованным численным критерием такого отклонения (качества приближенного решения) является значение максимальной по модулю невязки во всех рассматриваемых (контрольных) точках расчетной области. Однако ни в одном из рассмотренных методов данный критерий не используется.

С учетом указанных недостатков МКР, МКО и МКЭ предлагается более эффективный метод решения СДУЧП, который впервые был рассмотрен в [10]. В настоящей статье приводится его более подробное изложение. Метод основан на поиске таких значений коэффициентов линейных разложений базисных функций, представляющих зависимости искомым из СДУЧП функций от пространственных координат и времени, при которых минимального значения достигает максимальная по модулю невязка, определяемая среди всех невязок в заданных контрольных точках расчетной области. Переход от минимизации суммы квадратов невязок к минимизации максимальной по модулю невязки значительно улучшает качество приближенного решения и позволяет перейти от малых конечных элементов к достаточно крупным блокам, в пределах каждого из которых ищутся свои линейные разложения базисных функций. В основе метода лежит назначение в пределах расчетной области контрольных точек, в каждой из которых определяются невязки. Важно подчеркнуть, что количество невязок может и должно быть больше, причем существенно, числа коэффициентов линейных разложений базисных функций.

Все контрольные точки расчетной области делятся на три группы. Первая группа – это внутренние контрольные точки блоков. В данных точках рассчитываются только невязки исходных дифференциальных уравнений, получающиеся после подстановки в них искомым функций и их частных производных, определяемых из линейных разложений базисных функций. Вторая группа – это точки, лежащие на границах блоков. В этих точках невязки дифференциальных уравнений рассчитываются для каждого смежного блока с использованием его линейных разложений. Кроме того, определяются невязки между искомыми функциями смежных блоков. К третьей группе относятся контрольные точки, лежащие на границах расчетной области. В этих точках состав невязок дифференциальных уравнений дополняется невязками, определяющими точность приближения полученного решения к начальным и граничным условиям. В частности, определяются невязки между заданными значениями величин на границах расчетной области и рассчитанными из линейных комбинаций базисных функций значениями этих величин.

Если расчетная область делится на подобласти, каждая из которых описывается своей системой дифференциальных уравнений, то на блоки делятся указанные подобласти. В точках, лежащих на границах смежных подобластей, определяются невязки между значениями тех искомым функций, которые входят в системы дифференциальных уравнений обеих подобластей.

Следует отметить, что при минимизации максимальной по модулю невязки приходится сравнивать невязки, имеющие различную размерность и различный физический смысл. Поэтому такое сравнение возможно проводить лишь между относительными невязками, получающимися при делении абсолютных невязок на их максимально допустимые значения (максимально допустимые погрешности расчета соответствующих зависимостей).

Если исходная СДУЧП является линейной, то предлагаемый метод, который можно назвать методом контрольных точек (МКТ), сводится к решению задачи линейного программирования (ЛП) [11, 12]. В противном случае необходимо решать задачу нелинейного математического программирования.

Необходимо указать, что авторы настоящей работы являются специалистами в области математического моделирования и оптимизации теплоэнергетических установок и их элементов. Поэтому задача математически строгого обоснования предлагаемого метода в

данной статье не ставится, также не ставится задача достаточно полного обзора значительного числа методов решения подобных задач и сопоставления их с предлагаемым. Внимание уделяется обоснованию эффективности предлагаемого метода на основе опыта решения сложных задач динамических расчетов элементов энергетических объектов, одна из которых представлена в статье в качестве примера.

1. Математическая постановка задачи. Имеется расчетная область Q . Каждая точка этой области определяется N -мерным вектором x . В пространстве N параметров, определяющих область Q , протекает рассчитываемый динамический процесс. Как правило, данные параметры – это пространственные координаты и время.

В некоторых случаях динамические процессы, протекающие в различных частях расчетной области Q , могут описываться различными системами дифференциальных уравнений. В связи с этим полагаем, что область Q делится на L подобластей, в каждой из которых действует своя система дифференциальных уравнений в частных производных. В качестве примера подобластей можно рассмотреть трубчатый теплообменник “газ-жидкость”; для него можно выделить подобласти, в которых движутся газ и жидкость, а также подобласть, заполненную материалом теплообменных труб. Принимается, что для подобласти Q_l система включает K_l дифференциальных уравнений. Искомыми для этой подобласти являются K_l функций вида:

$$\begin{aligned} y_2^l &= f_2^l(x), \\ y_2^l &= f_2^l(x), \\ &\dots \\ y_{K_l}^l &= f_{K_l}^l(x). \end{aligned} \tag{1}$$

При этом i -ое дифференциальное уравнение в общем виде зависит от функций: $y_i^l, i = 1, \dots, K_l$, их первых производных $(y_{ij}^l)', i = 1, \dots, K_l, j = 1, \dots, N$ (общее число первых производных: $K_l \cdot N$), их вторых производных $(y_{ijq}^l)'' , i = 1, \dots, K_l, j = 1, \dots, N, q = 1, \dots, N$ (с учетом того, что $(y_{ijq}^l)'' = (y_{iqj}^l)''$ – общее число вторых производных $K_l \cdot (N^2 + N)/2$), где i – номер функции, j, q – номера переменных по которым осуществляется дифференцирование. Отметим, что в отдельные дифференциальные уравнения l -ой подобласти могут входить не все искомые функции y_i^l и не все их производные. Однако в дальнейшем для унификации описания задачи будем считать, что в каждое дифференциальное уравнение входят все функции $y_1^l, \dots, y_{K_l}^l$, первые производные всех функций по всем переменным $x, (y_{11}^l)', \dots, (y_{11}^l)'$, и все возможные значения вторых производных $(y_{111}^l)'', \dots, (y_{K_l NN}^l)''$. Тогда систему дифференциальных уравнений подобласти Q_l можно представить в виде

$$D^{lj}(y_1^l, \dots, y_{K_l}^l, (y_{11}^l)', \dots, (y_{K_l N}^l)', (y_{111}^l)'', \dots, (y_{K_l NN}^l)'', \dots) = 0, \tag{2}$$

$$j = 1, \dots, K_l,$$

где D^{lj} – j -е дифференциальное уравнение в подобласти Q_l записанное в неявной форме.

Отметим, что среди подобластей $Q_l, l = 1, \dots, K_l$ можно выделить пары смежных подобластей. Если некоторая точка x принадлежит границе пары смежных подобластей Q_i и Q_j (обозначим эту границу через Γ_{ij}), то некоторые функции, искомые из системы уравнений подобластей Q_i , равны в этой точке соответствующим (как правило, имеющим тот же физический смысл) функциям, определяемым из системы уравнений подобласти Q_j . Отметим, что в общем случае номер некоторой функции в системе уравнений подобласти Q_i может не совпадать с номером соответствующей ей функции в системе уравнений подобласти Q_j . Если подобласти Q_i и Q_j не являются смежными (т.е. не имеют общих точек),

то $\Gamma_{ij} = \emptyset$. Для каждой пары смежных подобластей Q_i и Q_j вводится множество пар номеров соответствующих функций

$$S^{ij} = \left\{ (n_1^{ij}, p_1^{ij}), (n_2^{ij}, p_2^{ij}), \dots, (n_{K_{ij}^{eq}}^{ij}, p_{K_{ij}^{eq}}^{ij}) \right\}, \quad (3)$$

где n_k^{ij} – номер функции в системе уравнений подобласти Q_i в k -ой паре соответствия, входящей в S^{ij} , p_k^{ij} – номер функции в системе уравнений подобластей Q_j в k -ой паре соответствия, входящей в S^{ij} , K_{ij}^{eq} – число пар соответствия для систем уравнений подобластей Q_i и Q_j . Если $x \in \Gamma^{ij}$, то должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} y_{n_1^{ij}}^i(x) &= y_{p_1^{ij}}^j(x), \\ y_{n_2^{ij}}^i(x) &= y_{p_2^{ij}}^j(x), \\ &\dots \\ y_{n_{K_{ij}^{eq}}^i}^i(x) &= y_{p_{K_{ij}^{eq}}^j}^j(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Для каждой подобласти Q_l вводятся множества внешних границ Γ_{ext}^{li} , $i = 1, \dots, l_{ext}^l$, где l_{ext}^l – число внешних границ подобласти Q_l . Для каждой границы Γ_{ext}^{li} вводится множество номеров искомым функций, значения которых на данной границе задано:

$$J_{ext}^{li} = \left\{ j_{ext1}^{li}, \dots, j_{extK_{ext}^{li}}^{li} \right\},$$

где K_{ext}^{li} – число функций, задаваемых на границе Γ_{ext}^{li} . В каждой точке $x \in \Gamma_{ext}^{li}$ должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} y_{j_{ext1}^{li}}^l(x) &= y_{j_{ext1}^{lz}}^l(x), \\ y_{j_{ext2}^{li}}^l(x) &= y_{j_{ext2}^{lz}}^l(x), \\ &\dots \\ y_{j_{extK_{ext}^{li}}^{li}}^l(x) &= y_{j_{extK_{ext}^{lz}}^{li}}^l(x), \end{aligned} \quad (5)$$

Надстрочным индексом z обозначаются заданные функции от независимых параметров. Аналогичным образом граничные условия могут быть введены не только для значений функций, но и для их производных.

Как видно, если функции $y_1^l = f_1^l(x), \dots, y_{K_l}^l = f_{K_l}^l(x)$, $l = 1, \dots, L$ являются решениями систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих подобласти Q_1, \dots, Q_L , то для каждой точки $x \in Q_l$ должны выполняться условия (2); для каждой точки $x \in \Gamma^{ij}$, если $\Gamma^{ij} \neq \emptyset$, должны выполняться краевые условия (4), а для каждой внешней границы множества Q_l должны выполняться краевые условия (5).

В настоящей работе вместо неизвестных функций (1), отвечающих условиям (2), (4), (5) и являющихся точными решениями, ищется приближенное решение в виде линейных комбинаций базисных функций. В качестве базисных функций используются функции вида $x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_N^{i_N}$, где x_l – l -ая компонента вектора x ; i_1, i_2, \dots, i_N – показатели степени, отвечающие условиям:

$$0 \leq i_j \leq S, \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^N i_j \leq S. \quad (7)$$

Искомые функции представляются в виде:

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k=1}^C a_k x_1^{i_{1k}} \cdot \dots \cdot x_N^{i_{Nk}}, \quad (8)$$

где $C = N^{S+1}$ – число всех возможных сочетаний степеней, отвечающих условиям (6), (7), i_{jk} – показатель степени в j -ом элементе сочетания при j -ой компоненте вектора x .

Коэффициенты a_k являются искомыми коэффициентами линейного разложения базисных функций.

Поскольку искомые линейные разложения базисных функций являются приближенными решениями рассматриваемых систем, то условия (2), (4), (5) строго выполняются не будут.

В связи с этим их целесообразно представить в следующем виде.

1. Условия (2) заменяются выражением:

$$D^{lj}(y_1^l, \dots, y_{K_l}^l, (y_{11}^l)', \dots, (y_{K_l, N}^l)', (y_{111}^l)', \dots, (y_{K_l, NN}^l)'', \dots) = \delta^{lj}, \quad (9)$$

$$j = 1, \dots, K_l, \forall x \in Q_l, l = 1, \dots, K_l,$$

где δ^{lj} – абсолютная невязка -го дифференциального уравнения системы дифференциальных уравнений l -ой подобласти Q_l .

2. Условия (4) заменяются выражениями:

$$y_{n_i}^{ij}(x) - y_{p_1}^{ij}(x) = \delta_k^{ij}, (n_k^{ij}, p_k^{ij}) \in S^{ij}, \quad (10)$$

$$k = 1, \dots, K_{ij}^{eq}, \forall x \in \Gamma^{ij},$$

$$i = 1, \dots, L, j = 1, \dots, L,$$

где δ_k^{ij} – абсолютная невязка условий (4) для подсистем уравнений подобластей Q_i и Q_j номера которых указаны в -ой паре номеров множества S^{ij} . Аналогично выражению (10) могут быть сформированы ограничения для производных искомым функций.

3. Условия (5) заменяются выражениями:

$$y_{j_{extk}}^{li}(\bar{x}) - y_{j_{extk}}^{lz}(\bar{x}) = \delta_{extk}^{li}, \quad (11)$$

$$k = 1, \dots, K_{ext}^{li}, \forall \bar{x} \in \Gamma_{ext}^{li},$$

где δ_{extk}^{li} – абсолютная невязка для функции системы уравнений подобласти Q_i , номер которой содержится в -ом элементе множества J_{ext}^{li} .

Полиномы заданной степени S (8), зависящие от вектора x и вектора коэффициентов A ,

где $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_c \end{pmatrix}$, не всегда с достаточной точностью могут представлять решение системы

дифференциальных уравнений соответствующей подобласти Q_l в точках этой подобласти. Для повышения указанной точности возможны два способа. Первый состоит в повышении степени полиномов, однако при слишком большой степени возникают значительные вычислительные трудности, преодоление которых требует очень высокой точности расчета коэффициентов полиномов при больших показателях степени. Второй способ состоит в разбиении подобласти Q_l на ряд блоков, в каждом из которых используются свои полиномы умеренных степеней. При этом на границах смежных блоков контролируются невязки значений функций y_1, \dots, y_{K_l} .

Введем дискретное множество N -мерных контрольных точек (x_k^1, \dots, x_k^v) , с достаточной плотностью (смысл этого понятия будет пояснен далее) покрывающее все подобласти расчетной области Q . Эти точки должны достаточно плотно покрывать пространство выделенных блоков, границы между смежными блоками внутри подобластей, границы между подобластями и внешние границы подобластей.

Обозначим множество контрольных точек, принадлежащих k – ому блоку подобласти Q_l через ψ_B^{lk} , а множество контрольных точек, принадлежащее границам смежных блоков i и j подобласти Q_l , через Γ_B^{lij} . Количество блоков в подобласти Q_l обозначим через B_l . Обозначим искомые функции (полиномы) k -го блока подобласти Q_l через

$$\tilde{y}_1^{lk} = F_1^{lk}(x, A_1^{lk}), \dots, \tilde{y}_{K_l}^{lk} = F_{K_l}^{lk}(x, A_{K_l}^{lk}), \quad (12)$$

где A_i^{lk} – C -мерный вектор коэффициентов полинома, представляющего i -ую искомую функцию -го блока подобласти Q_l .

Если некоторая контрольная точка $x_K^d \in \psi_B^{lk}$, то, подставляя координаты этой точки в выражения (12), можно определить значения искомых функций $y_{1d}^{lk}, \dots, y_{K_l d}^{lk}$ в этой точке. Поскольку все входящие в дифференциальные уравнения функции-производные легко находятся дифференцированием полинома (8), то, подставляя в данные функции координаты контрольной точки x_K^d , можно найти числовые значения частных производных функций $\tilde{y}_1^{lk}, \dots, \tilde{y}_{K_l}^{lk}$.

Подставляя вычисленные значения функций и их производных в выражения (9), найдем значения невязок для точки x_K^d . В этом случае (9) примет вид:

$$\begin{aligned} & D^{lkjd}(\tilde{y}_1^{lk}(x_K^d, A_1^{lk}), \dots, \tilde{y}_{K_l}^{lk}(x_K^d, A_{K_l}^{lk}), \\ & (\tilde{y}_{11}^{lk}(x_K^d, A_1^{lk}))', \dots, (\tilde{y}_{K_l N}^{lk}(x_K^d, A_{K_l}^{lk}))', \\ & (\tilde{y}_{111}^{lk}(x_K^d, A_1^{lk}))'', \dots, (\tilde{y}_{K_l NN}^{lk}(x_K^d, A_{K_l}^{lk}))'', \dots) = \delta^{lkjd} \end{aligned} \quad (13)$$

где l – номер подобласти, k – номер блока в подобласти, j – номер дифференциального уравнения в системе уравнений подобласти Q_l , d – номер контрольной точки.

Если контрольная точка принадлежит границе двух блоков k и t , входящих в подобласть Q_l , то невязки (9) определяются отдельно для полиномов k и t -ого блоков. Кроме того, определяются невязки вида:

$$\begin{aligned} \delta_1^{lktd} &= \tilde{y}_1^{lk}(x_K^d, A_1^{lk}) - \tilde{y}_1^{lt}(x_K^d, A_1^{lt}), \\ & \dots \\ \delta_{K_l}^{lktd} &= \tilde{y}_{K_l}^{lk}(x_K^d, A_{K_l}^{lk}) - \tilde{y}_{K_l}^{lt}(x_K^d, A_{K_l}^{lt}). \end{aligned} \quad (14)$$

Если точка x_K^d является угловой точкой границ между блоками, принадлежащей одновременно нескольким блокам подобласти Q_l , то в ней невязки вида (14) определяются для каждой пары смежных блоков.

Если точка x_K^d принадлежит одновременно k -ому блоку подобласти Q_i и $-$ ому блоку подобласти Q_j , то в такой точке должны определяться невязки (10), которые примут вид:

$$\begin{aligned} \delta_1^{itjkd} &= \tilde{y}_{n_1}^{ik}(x_K^d, A_{n_1}^{lk}) - \tilde{y}_{p_1}^{ik}(x_K^d, A_{p_1}^{lk}), \\ & \dots \\ \delta_{K_{ij}^{eq}}^{itjkd} &= \tilde{y}_{n_{K_{ij}^{eq}}}^{ik}(x_K^d, A_{K_{ij}^{eq}}^{lk}) - \tilde{y}_{p_{K_{ij}^{eq}}}^{ik}(x_K^d, A_{K_{ij}^{eq}}^{lk}). \end{aligned} \quad (15)$$

Если точка x_K^d принадлежит некоторому блоку k подобласти Q_l и одновременно принадлежит внешней границе i данной подобласти, то в такой точке дополнительно должны быть определены невязки (11), которые примут вид:

$$\begin{aligned} \delta_{ext1}^{lkid} &= \tilde{y}_{j_{ext1}^{li}}^{lk}(x_K^d, A_{j_{ext1}^{li}}^{lk}) - \tilde{y}_{j_{ext1}^{li}}^{lz}(x_K^d), \\ & \dots \\ \delta_{extK_{ext}^{li}}^{lkid} &= \tilde{y}_{j_{extK_{ext}^{li}}^{li}}^{lk}(x_K^d, A_{j_{extK_{ext}^{li}}^{li}}^{lk}) - \tilde{y}_{j_{extK_{ext}^{li}}^{li}}^{lz}(x_K^d), \end{aligned} \quad (16)$$

Зная геометрию расчетной области задачи Q (разбиение ее на подобласти, разбиение подобластей на блоки, внешние границы подобластей, состав дифференциальных уравнений в подобластях, принадлежность контрольных точек подобластям, блокам и границам) можно сформировать систему уравнений для расчета абсолютных невязок в контрольных точках. Как уже отмечалось, для сопоставления различных невязок необходим переход от

абсолютных невязок к относительным. Для этого каждую абсолютную невязку нужно разделить на ее заранее заданную предельно допустимую величину. В общем виде относительная невязка определяется из выражения:

$$\delta_i^{\text{rel}} = \frac{\delta_i^{\text{abs}}}{\varepsilon_i^{\text{max}}}, \quad (17)$$

где δ_i^{abs} – абсолютное значение i -ой невязки, δ_i^{rel} – относительное значение i -ой невязки, $\varepsilon_i^{\text{max}}$ – предельно допустимое значение i -ой невязки.

Каждой относительной невязке в соответствие ставятся два ограничения-неравенства:

$$\begin{aligned} g_i^+ &= z - \delta_i^{\text{rel}} \geq 0, \\ g_i^- &= z + \delta_i^{\text{rel}} \geq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где z – вспомогательный параметр, причем $z \geq 0$.

Если решать задачу на минимизацию z , то использование двух неравенств (18) обеспечит "двухстороннее сжатие" невязки. Если значение невязки положительное, то ее сокращение будет обеспечено за счет неравенства g^+ , а если ее значение отрицательное, то сокращение будет обеспечено за счет невязки g^- .

Если исходные дифференциальные уравнения линейные, то система равенств и неравенств (13)–(18) будет линейной.

Как правило, исходное дифференциальное уравнение разрешено относительно какой-либо производной (первой степени, второй степени и т.д.), которые стоят в левой части данного уравнения. Приведение уравнений к виду (2), т.е. к неявной форме, осуществляется за счет переноса правых частей уравнений в левые части с изменением знака (при этом правые части уравнений оказываются равными нулю).

По поводу выбора допустимой погрешности решения систем уравнений (13)–(16) можно отметить следующее. Выбор предельно-допустимых значений невязок для условий (14)–(16), как правило, не вызывает сложностей, поскольку из содержательного анализа решаемой задачи можно оценить требуемые точности расчета искомых функций (1). Сложнее выбрать предельно допустимые погрешности решения систем дифференциальных уравнений в частных производных (13). В этом случае можно использовать следующий эвристический подход.

Рассмотрим исходное дифференциальное уравнение, в левой части которого стоит первая производная $\frac{\partial y_k^l}{\partial x_i}$, где l – номер подпространства, k – номер искомой функции, i – номер свободного параметра.

Положим, что для функции y_k^l на основе содержательного анализа определена предельно-допустимая погрешность ε_k^l . Тогда предельно-допустимая погрешность при определении производной ε_{ki}^l может быть оценена из условия

$$\varepsilon_{ki}^l \geq \varepsilon_k^l \cdot |\Delta x_i^l| \cdot N, \quad (19)$$

где Δx_i^l – максимальное изменение параметра x_i в подпространстве Q_l , N – размерность вектора независимых параметров в подпространстве Q_l .

Заменяя в (19) знак неравенства на равенство и разрешая полученное уравнение относительно ε_{ki}^l , имеем

$$\varepsilon_{ki}^l = \frac{\varepsilon_k^l}{|\Delta x_i^l| \cdot N}.$$

После того, как будут определены требуемые точности расчета первых производных, с использованием данного подхода можно определить требуемые точности расчета вторых производных и т.д.

Теперь можно определить систему ограничений, построенную на основе неравенств (18). Обозначим ее за M^Z -мерную векторную функцию $G(z, A^Z)$. Она включает в себя невязки описанных выше типов для всех контрольных точек.

В результате задача математического программирования, к которой сводится решение исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных, может быть представлена в виде:

$$\min_{z, A^Z} z \quad (20)$$

при ограничениях

$$G(z, A^Z) \geq 0, \quad (21)$$

$$\underline{A}^Z \leq A^Z \leq \bar{A}^Z, \quad (22)$$

где z – вспомогательный параметр, A^Z – N^Z -мерный вектор оптимизируемых параметров (коэффициентов полиномов всех блоков), \bar{A}^Z , \underline{A}^Z – вектора, элементы которых задают нижнюю и верхнюю границы компонентов вектора A^Z . Если G – система линейных неравенств, то (20)–(22) будет задачей линейного программирования.

Общее число ограничений-неравенств в M^Z в задаче определяется числом контрольных точек, распределением их на внутренние и граничные, подсистемами дифференциальных уравнений и граничными условиями. Число оптимизируемых параметров, кроме того, определяется числом блоков и степенями полиномов, с помощью которых описываются искомые функции.

Если в точке решения задачи (20)–(22) $z \leq 1$, то абсолютные невязки находятся в допустимых интервалах. Если в точке решения $z > 1$, то требуется увеличить число блоков (при сохранении степени полиномов) или увеличить степени полиномов (при сохранении числа блоков).

Следует отметить, что с использованием найденных в результате оптимизации полиномов, аппроксимирующих искомые функции, легко может быть проведен расчет в проверочных точках, число которых существенно больше числа контрольных точек. Если при $z \leq 1$ в некоторых проверочных точках условия (21) не выполняются, то из проверочных точек с максимальными значениями относительных невязок могут быть выбраны дополнительные контрольные точки, которые включаются в исходную задачу. Если во всех проверочных точках условия (21)–(22) при $z = 1$ выполняются, то можно считать, что пространство решения задачи заполнено контрольными точками с достаточной плотностью.

2. Математическая модель теплообменника. В качестве примера рассмотрим расчет керамического теплообменника периодического действия. В отличие от модели в [13], где предполагается мгновенная передача тепла внутри керамических шаров, будет построена модель, которая учитывает конечную скорость передачи тепла между слоями керамических шаров. Такой теплообменник представляет собой цилиндрический объем, заполненный шаровой засыпкой, состоящей из керамических шаров одинакового малого радиуса R . В теплообменник периодически подается греющий газ (продукты сгорания органического топлива), нагревающий шаровую засыпку и нагреваемый воздух, охлаждающий шаровую засыпку. При этом движение потоков газа и воздуха происходит вдоль оси цилиндра в противоположных направлениях. Работа теплообменника имеет периодический характер. Сначала следует стадия нагрева шаровой засыпки, тогда в теплообменник подается газ. Затем следует стадия охлаждения шаровой засыпки, тогда в теплообменник подается воздух.

Особенностью данной задачи является то, что значения температур керамики в любой момент процесса неизвестны.

При расчете делается упрощающее предположение, состоящее в том, что теплообмен между всеми шарами, расположенными в одном сечении, перпендикулярном оси цилиндра и продуктами сгорания или воздухом, протекает одинаково.

Обозначим через $T_{gh}, T_{gc}, T_{ch}, T_{cc}$ температуры: греющего газа, воздуха, керамики при ее нагреве и керамики при ее охлаждении соответственно.

Обозначим α_{gas} – коэффициент теплоотдачи от газа к керамике, α_{air} – коэффициент теплоотдачи от керамики к воздуху, F_{spec} – удельная площадь теплообмена (на кубический метр засыпки), $\rho_{\text{gas}}, \rho_{\text{air}}$ – плотность газа и воздуха соответственно. $W_{\text{gas}}, W_{\text{air}}$ – скорость газа и воздуха, $C_{\text{gas}}, C_{\text{air}}$ – удельные теплоемкости газа, воздуха, F_* – площадь живого сечения на единицу площади засыпки, A – коэффициент температуропроводности керамики, λ – теплопроводность керамики.

На стадии нагрева керамики дифференциальное уравнение теплового баланса газа имеет следующий вид:

$$(T_{gh}(x, \tau) - T_{ch}(x, \tau, r)) \alpha F_{\text{spec}} + \rho_{\text{gas}} C_{\text{gas}} F_* \left(W_{\text{gas}} \frac{\partial T_{gh}(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial T_{gh}(x, \tau)}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (23)$$

Теплообмен между воздухом и керамикой описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$(T_{gh}(x, \tau) - T_{ch}(x, \tau, r)) \alpha F_{\text{spec}} - \lambda \frac{\partial T_{ch}(x, \tau, r)}{\partial \tau} = 0. \quad (24)$$

Дифференциальное уравнение распространения тепла в керамике учитывает распространение тепла внутри шара керамической засыпки. Рассматривается радиальное распространение тепла в однородном шаре радиуса R . Предполагается, что в любой момент времени t температура в точках, находящихся на одном расстоянии r от центра шара, будет одинаковой. Это означает, что температура зависит в каждом шаре только от r и от t . Если для каждого шара ввести сферические координаты, то процесс распространения тепла описывается дифференциальным уравнением Фурье [14]:

$$T_{ch}(x, \tau, r) - A \left(\frac{\partial^2 T_{ch}(x, \tau, r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_{ch}(x, \tau, r)}{\partial r} \right) = 0. \quad (25)$$

На стадии охлаждения керамики дифференциальное уравнение теплового баланса воздуха имеет следующий вид:

$$(T_{gc}(x, \tau) - T_{cc}(x, \tau, r)) \alpha F_{\text{spec}} + \rho_{\text{air}} C_{\text{air}} F_* \left(W_{\text{air}} \frac{\partial T_{gc}(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial T_{gc}(x, \tau)}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (26)$$

Теплообмен между воздухом и керамикой в процессе охлаждения керамики описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$(T_{gc}(x, \tau) - T_{cc}(x, \tau, r)) \alpha F_{\text{spec}} - \lambda \frac{\partial T_{cc}(x, \tau, r)}{\partial \tau} = 0. \quad (27)$$

И для распространения тепла внутри керамической засыпки дифференциальное уравнение Фурье примет следующий вид:

$$T_{cc}(x, \tau, r) - A \left(\frac{\partial^2 T_{cc}(x, \tau, r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_{cc}(x, \tau, r)}{\partial r} \right) = 0. \quad (28)$$

В модели учитываются граничные условия (условия реверсивности), требующие, чтобы температура керамики во всех контрольных точках в момент начала стадии нагрева равнялась температуре керамики в соответствующих контрольных точках в момент окончания стадии охлаждения и температура керамики в контрольных точках в момент окончания стадии нагрева равнялась температуре керамики в контрольных точках в момент начала стадии охлаждения. Таким образом, в данной задаче имеются две подобласти. В одной действуют

дифференциальные уравнения передачи тепла от газа к керамике, в другой – передачи тепла от керамики к воздуху.

Поскольку коэффициенты, характеризующие теплообмен, являются функциями от рассчитываемых в результате решения данной задачи температур газа, воздуха и керамики, то расчет теплообменника осуществляется итерационно.

На первой итерации задаются приближенные значения коэффициентов (теплоемкость, теплопроводность и т. д.) в различных токах теплообменника в разные моменты времени, после чего решается задача (20)–(22). В результате решения получаем температуры керамики, газа и воздуха. На основе полученных температур уточняются указанные коэффициенты, после чего снова решается задача (20)–(22). Процесс уточнения идет до тех пор, пока разность температур, полученных на соседних итерациях, не окажется меньше некоторой заданной величины.

3. Результаты расчета. Расчет теплообменника проводится при следующих исходных данных. Радиус цилиндрического теплообменника 2 м. Высота теплообменника – 4 м. Продолжительность стадии нагрева и продолжительность стадии охлаждения 150 секунд. Радиус шара засыпки составляет 0,01 м. На протяжении всей стадии нагрева температура газа на входе в теплообменник составляет 1800 К. На протяжении всей стадии охлаждения температура воздуха составляет 778 К. Расход газа и воздуха составляет соответственно 8,74 кг/с и 11,43 кг/с

При проведении расчетов выделялись 2 подобласти. Подобласть стадии нагрева, и подобласть стадии охлаждения. Каждая подобласть делилась на 25 блоков с использованием деления времени на 5 равных интервалов и длины теплообменника на 5 равных интервалов.

Общее количество контрольных точек, на стадии нагрева и на стадии охлаждения – по 13650 для каждой из подобластей. Общее количество невязок: 36330. Общее число ограничений в задаче составляет 72660, количество оптимизируемых параметров составляет: 1501. Каждый из полиномов, входящих в 25 блоков подобласти, описывается десятью (для газа или воздуха) и двадцатью (для керамики) параметрами. К общему числу параметров добавляется вспомогательный параметр z . С учетом необходимости уточнения коэффициентов, входящих в дифференциальные уравнения и зависящих от температур газа, воздуха и керамики, были проведены 3 итерации решения задачи линейного программирования. Оптимальное значение задачи 0,9541. Расчет невязок в проверочных точках (которых было в 2 раза больше, чем контрольных) показал, что максимальная невязка равна 0,9724. Ниже представлены рассчитанные значения температур газа, воздуха и керамики для некоторых точек теплообменника (рис. 1-2).

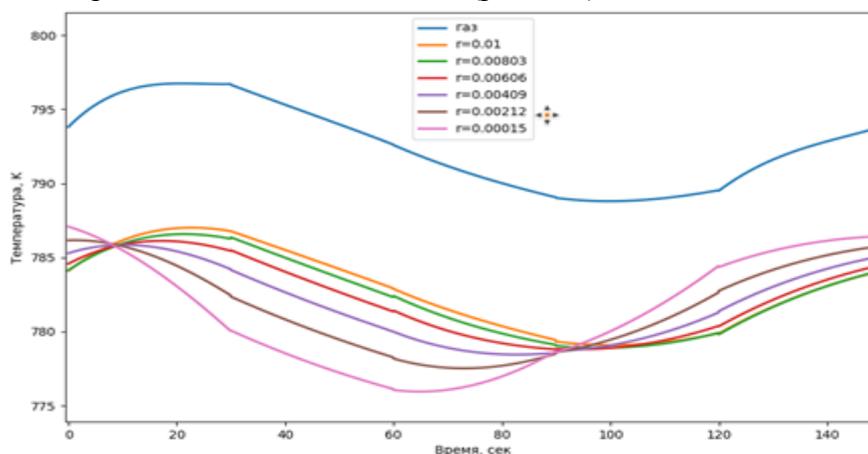


Рис. 1. Температура газа (синий) и керамики на различных расстояниях от центра на стадии нагрева керамики на выходе из теплообменника (на противоположном от точки подачи газа конце)

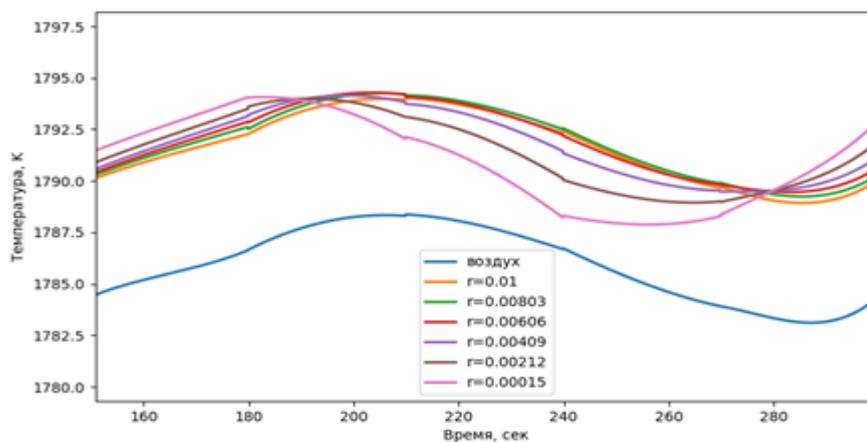


Рис. 2. Температура воздуха (синий) и керамики на различных расстояниях от центра на стадии охлаждения керамики на выходе из теплообменника (на противоположном от точки подачи воздуха конце)

При нагреве керамического шара внешние его слои будут иметь более высокую температуру, чем внутренние, а при охлаждении шара внешние слои будут иметь более низкую температуру, чем внутренние. При чередовании процессов нагрева и охлаждения должен происходить «переворот» температурных напоров внутри шара, который хорошо виден на представленных рисунках, что говорит о правильном представлении процесса, как минимум, на качественном уровне.

Расчеты показывают, что теплопроизводительность теплообменника (передача тепла от газа к воздуху) за один цикл нагрев-охлаждение (300 с.) составляет $2.36 \cdot 10^6$ кДж.

Необходимо отметить, что решаемая задача является весьма сложной для методов МКР МКО и МКЭ. Она решается следующим образом. Задаются приближенные значения температуры керамики в начальный момент времени. Затем моделируются многократно процессы нагрева и охлаждения керамики до тех пор, пока температура в начале стадии нагрева не стабилизируется и не будет близка к температуре керамики в конце стадии охлаждения.

При характерных для керамики значениях коэффициентов температуропроводности, рассматриваемая система дифференциальных уравнений является «жесткой». Это требует задания малых характерных размеров по пространственным координатам и по времени, что обуславливает значительный расход вычислительных ресурсов при использовании МКО и МКЭ. Применение рассмотренного подхода существенно сокращает необходимые для решения задачи ресурсы. Время решения представленной задачи ЛП на процессоре Intel Core i9 Alder Lake с 16-ю ядрами составило 81 с. Полное решение с учетом 3-х стадий уточнения температур воздуха, газа и керамики составило 247 с.

Решить данную задачу с помощью МКО решить не удалось в связи с недопустимо большим расходом машинного времени.

Заключение. Расчеты динамических процессов в элементах теплоэнергетических установок (теплообменники, камеры сгорания, турбомашины и др.) необходимы для обоснования допустимых и оптимальных режимов работы, выбора конструктивных характеристик элементов, оценки их надежности и т. д. Эти задачи сводятся к решению систем уравнений в частных производных, при этом в основном используются метод конечных разностей и метод конечных элементов, которые громоздки и сложны.

На основе анализа недостатков существующих методов предлагается эффективный численный метод решения этих задач (метод контрольных точек). Метод основан на сведении решения СДУЧП к решению задач линейного программирования. Метод особенно эффективен, когда неизвестны все начальные условия (в примере с теплообменником это

значения температур керамики), а также система дифференциальных уравнений является жесткой.

Метод иллюстрируется вычислительным экспериментом с расчетом действия периодического керамического теплообменника с шаровой засыпкой

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-01654, <https://rscf.ru/project/22-29-01654>.

Список источников

1. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений: Учебное пособие / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – Наука, 1978.
2. Calatayud J. et al. Constructing reliable approximations of the probability density function to the random heat PDE via a finite difference scheme./Applied Numerical Mathematics, 2020, T. 151, pp. 413-424. DOI 10.1016/j.apnum.2020.01.012.
3. Smith G., Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods. Oxford university press, 1985, 321 p.
4. Kazem S., Dehghan M. Application of finite difference method of lines on the heat equation. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2018, vol. 34, no. 2, pp. 626-660, DOI: 10.1002/num.22218
5. Пантакар С., Тепло и массообмен в пограничных слоях / С. Пантакар, Д. Сполдинг, 1971.
6. Cebula A., Taler J., Ocloń P. Heat flux and temperature determination in a cylindrical element with the use of finite volume finite element method. International journal of thermal sciences, 2018, vol. 127, pp. 142-157, DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.01.022
7. Zienkiewicz O.C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Elsevier, 2005.
8. Eymard R., Gallouët T., Herbin R. Finite volume methods //Handbook of numerical analysis, 2000, vol. 7, pp. 713-1018.
9. Johnson C. Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. Courier Corporation, 2012.
10. Kler A., Apanovich D., Maximov A. An effective method for calculating the elements of thermal power plants, which are reduced to solving systems of partial differential equations. E3S Web of Conferences, EDP Sciences, 2020, vol. 209, pp. 03029, DOI: 10.1051/e3sconf/202020903029
11. Юдин Д.Б. Задачи и методы линейного программирования / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн, 1961.
12. Gale D. Linear programming and the simplex method. Notices of the AMS, 2007, vol. 54, no. 3, pp. 364-369.
13. Клер А.М. Разработка математической модели системы высокотемпературных керамических теплообменников периодического действия / А.М. Клер, А.Ю. Маринченко, Ю.М. Потанина, П.В. Жарков // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2018. – Т. 329. – №. 3. – С. 26-35. DOI: 10.1134/S0002331019060062
14. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков и др. //М.: Высшая школа, 1970. – Т. 712. – С. 11.

Клер Александр Матвеевич. Доктор технических наук, профессор, заведующий отделом «Тепловые системы», Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева, SPIN-код: 8502-2561, AuthorID: 20219, kler@isem.irk.ru, 664130, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова 130.

Апанович Данил Владимирович. Инженер-исследователь отдела «Тепловые системы», Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева, dvapan@gmail.com, 664130, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова 130.

UDC 621.311.001.57

DOI:10.38028/ESI.2022.27.3.014

The method of dynamic calculations of elements of thermal power plants, which reduces the solution of systems of differential equations in partial derivatives to the solution of linear programming problems

Alexandr M. Kler, Danil V. Apanovich

Melentiev Energy Systems Institute of SB RAS, Russia, Irkutsk, dvapan@gmail.com

Abstract. Calculations of dynamic processes in the elements of thermal power plants (heat exchangers, combustion chambers, turbomachines, etc.) are necessary to justify the permissible and optimal operating modes, select elements of design characteristics, assess their reliability, etc. These problems are reduced to solving systems of partial differential equations. Currently, for such calculations, the finite difference method and the

finite element method are mainly used. These methods are cumbersome and complicated. The article proposes a method, the main idea of which is to reduce the solution of these systems of equations to the solution of linear programming (LP) problems. The operation of the method is demonstrated on the example of a batch heat exchanger.

Keywords: numerical methods, partial differential equations, linear programming, dynamic processes

Acknowledgements: The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-29-01654, <https://rscf.ru/project/22-29-01654/>

References

1. Samarskiy A. A., Nikolayev Ye. S. Metody resheniya setochnykh uravneniy: Uchebnoye posobiye [Methods for solving grid equations: textbook. for universities]. Nauka [Science], 1978.
2. Calatayud J. et al. Constructing reliable approximations of the probability density function to the random heat PDE via a finite difference scheme / Applied Numerical Mathematics, 2020, T. 151, pp. 413-424. DOI 10.1016/j.apnum.2020.01.012.
3. Smith G., Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods. Oxford university press, 1985, 321 p.
4. Kazem S., Dehghan M. Application of finite difference method of lines on the heat equation. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2018, vol. 34, no. 2, pp. 626-660, DOI: 10.1002/num.22218
5. Pantakar S., Spolding D. Teplo i massoobmen v pogranichnykh sloyakh [Heat and mass transfer in boundary layers], 1968.
6. Cebula A., Taler J., Ocloń P. Heat flux and temperature determination in a cylindrical element with the use of finite volume finite element method. International journal of thermal sciences, 2018, vol. 127, pp. 142-157, DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.01.022
7. Zienkiewicz O.C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Elsevier, 2005.
8. Eymard R., Gallouët T., Herbin R. Finite volume methods // Handbook of numerical analysis, 2000, vol. 7, pp. 713-1018.
9. Johnson C. Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. Courier Corporation, 2012.
10. Kler A., Apanovich D., Maximov A. An effective method for calculating the elements of thermal power plants, which are reduced to solving systems of partial differential equations. E3S Web of Conferences, EDP Sciences, 2020, vol. 209, pp. 03029, DOI: 10.1051/e3sconf/202020903029
11. Yudin D. B., Gol'shteyn Ye. G. Zadachi i metody lineynogo programmirovaniya [Problems and Methods of Linear Programming], 1961.
12. Gale D. Linear programming and the simplex method. Notices of the AMS, 2007, vol. 54, no. 3, pp. 364-369.
13. Kler A. M., Marinchenko A. YU., Potanina YU. M., Zharkov P.V. Razrabotka matematicheskoy modeli sistemy vysokotemperaturnykh keramicheskikh teploobmennikov periodicheskogo deystviya [Development of a mathematical model of a system of high-temperature ceramic heat exchangers of periodic action] Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov. [Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Georesource Engineering], 2018, vol.329, no.3, pp.26-35.
14. Koshlyakov N. S. i dr. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki [Equations in partial derivatives of mathematical physics]. Vysshaya shkola [Higher school], Moscow, 1970, 712 p.

Alexandr M. Kler. Doctor of Science, professor; Head of the Department of Thermal Systems of the Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, SPIN: 8502-2561, AuthorID: 20219, kler@isem.irk.ru, Russia, Irkutsk, st. Lermontova d.130.

Danil V. Apanovich. Research Engineer of the Department of Thermal Systems of the Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, dvapan@gmail.com, Russia, Irkutsk, st. Lermontova d.130.

Статья поступила в редакцию 12.04.22; одобрена после рецензирования 25.07.2022; принята к публикации 29.07.2022.

The article was submitted 04/12/22; approved after reviewing 07/25/2022; accepted for publication 07/29/2022.