

УДК 681.5

DOI: 10.38028/ESI.2022.26.2.014

## Алгоритмическое обеспечение адаптивной системы управления автономным мобильным роботом

**Баканов Максим Витальевич, Данеев Алексей Васильевич, Сизых Виктор Николаевич**  
Иркутский государственный университет путей сообщения,  
Россия, Иркутск, *daneev@mail.ru*

**Аннотация.** В статье разработаны математические модели трехколесного мобильного робота на основе аппарата переменных состояния и в операторном виде, на основе которых осуществляется синтез его адаптивной системы управления по методике построения модальных ПИД-регуляторов и по методу обратных задач динамики. Математическая модель позволяет без аппаратной реализации мобильного робота проанализировать работу создаваемой системы управления и при необходимости внести необходимые коррекции. Математическая модель мобильного робота состоит из кинематической и динамической моделей. Кинематическая модель является простейшим описанием поведения мобильного робота и допускает исследование его свойств. Динамическая модель является более подробным описанием мобильного робота и учитывает силомоментные воздействия, произведённые исполнительными механизмами. Для того чтобы математически описать мобильный робот, введен ряд условий, сформулированных в виде следующих допущений: 1) мобильный робот рассматривается при условии, что его механизм является жёстко связанным; 2) колёса являются недеформируемыми и находятся в точечном контакте с поверхностью; 3) движение робота осуществляется без проскальзывания; 4) платформа рассматривается как твёрдое тело, на котором закреплена колёсная система. В работе приведены следующие результаты исследования: разработаны математические модели мобильного робота в пространстве состояний и в операторной форме; синтезирован алгоритм управления движением робота на основе метода обратных задач динамики; разработана Simulink-модель управляемого мобильного робота на основе методики модального ПИД-регулирования. Устойчивость системы управления обеспечивается за счет введения внешней отрицательной обратной связи по угловой скорости движения платформы робота. Результаты моделирования показывают, что по сравнению с точной непрерывной математической моделью управления робота погрешности по координатам, угловым и линейным скоростям и моментам составляют 5-7 %, что позволяет сделать вывод о соответствии разработанной цифровой модели робота, ее точному непрерывному аналогу.

**Ключевые слова:** автономный мобильный робот, математические модели в пространстве состояний и в операторном виде, модальный ПИД-регулятор, метод обратных задач динамики

**Цитирование:** Баканов М.В. Алгоритмическое обеспечение адаптивной системы управления автономным мобильным роботом / М.В. Баканов, А.В. Данеев, В.Н. Сизых // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2022. – № 2(26). – С. 147-160. – DOI:10.38028/ESI.2022.26.2.014.

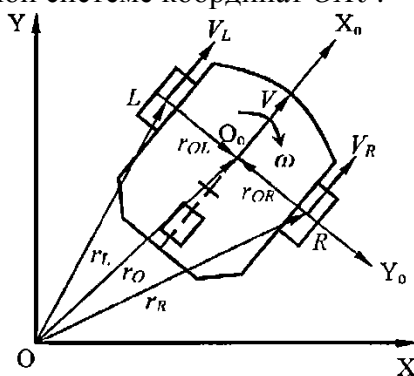
**Введение.** Для описания поведения мобильного робота необходимо разработать его математическую модель. Это позволит без аппаратной реализации мобильного робота проанализировать работу создаваемой системы управления и при необходимости внести необходимые коррекции. Математическая модель мобильного робота состоит из кинематической и динамической моделей. Кинематическая модель является простейшим описанием поведения мобильного робота и допускает исследование его свойств. Динамическая модель является более подробным описанием мобильного робота и учитывает силомоментные воздействия, произведённые исполнительными механизмами.

Приводимое математическое описание движения мобильного робота справедливо для случая движения робота по горизонтальной плоскости. Для того, чтобы математически описать мобильный робот, необходимо ввести ряд условий, сформулированных в виде следующих допущений [1]:

- 1) будем рассматривать мобильный робот при условии, что его механизм является жёстко связанным;

- 2) колёса являются недеформируемыми и находятся в точечном контакте с поверхностью;
- 3) движение робота осуществляется без проскальзывания;
- 4) платформа рассматривается как твёрдое тело, на котором закреплена колёсная система.

**1. Кинематическая модель мобильного робота.** Поскольку движение робота осуществляется в горизонтальной плоскости, то достаточно рассмотреть плоский случай. На рис. 1 изображен мобильный робот с соответствующими системами координат [2, 3]. В точках  $L$  и  $R$  расположены колеса, оси вращения которых совпадают с отрезком  $LR$  длины  $l$ . Свяжем с роботом систему координат  $O_0X_0Y_0$ , расположив точку  $O_0$  посередине отрезка  $LR$  и направив ось  $X_0$  перпендикулярно  $LR$  в направлении движения. Тогда положение основания робота как твердого тела задается тройкой чисел  $\varphi, x, y$ , где  $\varphi$  – угол между осями  $X$  и  $X_0$ ;  $x, y$  – координаты точки  $O_0$  в абсолютной системе координат  $OXY$ .



**Рис. 1.** Кинематическая схема мобильного робота

Положение точек робота  $O_0, L$  и  $R$  в абсолютной системе соответствует радиус-векторам  $r_O, r_L$  и  $r_R$ . При этом, положение точки  $O_0$  может быть получено из следующих выражений

$$r_O = r_R + r_{OR}, r_O = r_L + r_{OL}. \quad (1)$$

Из кинематики плоского движения известно, что скорость движения любой точки некоторого твёрдого тела может быть представлена в виде

$$V_A = V_O + \omega \times r_{OA}, \quad (2)$$

где  $V_A$  – скорость поступательного движения произвольной точки  $A$ ;

$V_O$  – скорость поступательного движения полюса твёрдого тела;

$\omega$  – скорость вращательного движения твёрдого тела относительно полюса  $O$ ;

$r_{OA}$  – радиус-вектор, определяющий положение точки  $A$  относительно полюса  $O$ .

Таким образом, в соответствии с рис. 1 скорость движения правого и левого колес мобильного робота может быть получена из следующих выражений:

$$\begin{cases} V = V_R + \omega \times r_{OR} \\ V = V_L + \omega \times r_{OL} \end{cases} \quad (3)$$

Раскрывая векторное произведение в выражениях (3), при условии  $r_{OR} = r_{OL}$  получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \omega = \frac{1}{l} (V_R - V_L) \\ V = \frac{1}{2} (V_R + V_L) \end{cases}, \quad (4)$$

где  $l$  – длина оси между колесами.

Введем в рассмотрение декартову прямоугольную систему координат  $x, y, \varphi$ . Тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \varphi, \\ \dot{y} = V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \omega. \end{cases} \quad (5)$$

Подставляя уравнения (4) в выражения (5), окончательно получим

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}(V_R + V_L) \cos \varphi, \\ \dot{y} = \frac{1}{2}(V_R + V_L) \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{l}(V_R - V_L). \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $x, y$  – координаты платформы робота на плоскости,  $\varphi$  – угол поворота платформы. Соотношения (6) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка относительно фазового вектора с компонентами  $(x, y, \varphi)$ . Скаляры  $V_R$  и  $V_L$ , заданные тем или иным образом (как функции времени или фазовых координат), определяют движение платформы. Таким образом, соотношения (6) можно рассматривать как кинематическую модель мобильного трехколесного робота. Линейная и угловая скорости робота определяются из выражения (4).

**2. Динамическая модель мобильного робота.** Прежде чем перейти к выводу уравнений движения, рассмотрим более детально связи, наложенные на перемещение робота. Мобильный робот осуществляет движение по плоскому рельефу, имея два ведущих колеса радиуса  $\rho$ . Колеса вращаются без проскальзывания, и оси их вращения совпадают с линией  $LR$  (рис. 2). Это условие устанавливает ограничения на координаты и скорости, и представляет собой одно из уравнений связи, геометрическая интерпретация которого состоит в том, что вектор скорости  $V=(x',y')^T$  перпендикулярен орту  $y_0$ . Таким образом, налагаемая связь является неголономной [4, 6].

Рассмотрим теперь условия непроскальзывания. Мы рассматриваем робот как систему трех твердых тел, включающую платформу и два ведущих колеса. Положение этой системы задается следующим набором параметров:  $x, y, \varphi$  – координаты положения платформы;  $q_L, q_R$  – углы поворота правого и левого колеса соответственно. Условия непроскальзывания получим, воспользовавшись соотношениями (6), а также тем обстоятельством, что

$$\begin{aligned} V_R &= \rho \dot{q}_R, \\ V_L &= \rho \dot{q}_L. \end{aligned} \quad (7)$$

Последнее уравнение в соотношениях (6) интегрируется

$$\varphi = \frac{\rho}{l}(q_R - q_L) + C, \quad (8)$$

где  $C$  – некоторая постоянная. Окончательно уравнения связи (6) принимают вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\rho}{2}(\dot{q}_R + \dot{q}_L) \cos \varphi, \\ \dot{y} = \frac{\rho}{2}(\dot{q}_R + \dot{q}_L) \sin \varphi, \\ \varphi = \frac{\rho}{l}(q_R - q_L) + C. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда рассматриваемая система имеет три обобщенные координаты  $(x, y, \varphi)$  и две степени свободы. При составлении динамической модели будем пренебрегать моментами инерции колёс и других вращающихся частей привода, так как они значительно меньше соответствующих моментов платформы, приведённых к валу электрического двигателя.

Теперь перейдём к выводу уравнения движения. Для вывода уравнений движения воспользуемся уравнением Лагранжа II рода [7, 8]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i, i=1,2,\dots,n, \quad (10)$$

где  $n$  – число обобщенных координат;  $E_k$  – кинетическая энергия;  $q_i$  – обобщенные координаты;  $Q_i$  – обобщенные силы.

Рассматриваемый мобильный робот имеет два независимых ведущих колеса. Поскольку колёса находятся в точечном контакте и осуществляют движение без проскальзывания, то вращающий момент  $\tau_i$  может быть представлен в виде силы  $F_i = \tau_i/\rho$ , приложенной к оси этого ведущего колеса. Таким образом, наша система может быть представлена в виде твёрдого тела, осуществляющего плоскопараллельное движение под воздействием системы сил (рис. 2).

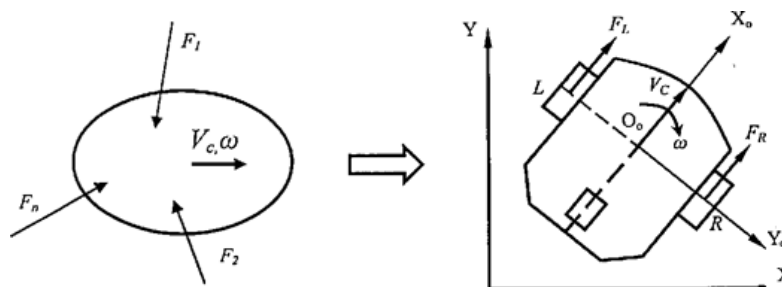


Рис. 2. Движение мобильного робота под воздействием системы сил

Уравнение кинетической энергии платформы как твёрдого тела имеет вид

$$E_k = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}, \quad (11)$$

где  $m$  – масса платформы;  $V_c$  – скорость центра масс платформы;  $J_c$  – момент инерции платформы относительно центра масс;  $\omega$  – угловая скорость платформы.

Запишем уравнение кинетической энергии платформы с учётом обобщённых координат  $(x, y, \varphi)$

$$E_k = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J_c}{2}\dot{\varphi}^2. \quad (12)$$

В соответствии с уравнением Лагранжа II рода, выполнив ряд преобразований, получим систему уравнений вида

$$\begin{cases} m\ddot{x} = (F_R + F_L)\cos\varphi, \\ m\ddot{y} = (F_R + F_L)\sin\varphi, \\ J\ddot{\varphi} = \frac{l}{2}(F_R - F_L). \end{cases} \quad (13)$$

Система дифференциальных уравнений (13), описывающая движение платформы в абсолютной системе координат  $XOY$  под воздействием сил  $F_R$  и  $F_L$ , соответствует уравнениям плоскопараллельного движения, описывающим перемещение центра масс твёрдого тела под воздействием системы внешних сил.

Возводя в квадрат и складывая правые и левые части первых двух уравнений системы (13) с учетом выражений для управляющих моментов правого и левого колес робота (

$\tau_R = F_R\rho, \tau_L = F_L\rho, V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \omega = \dot{\varphi}$ ), окончательно получим

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{1}{\rho m}(\tau_R + \tau_L), \\ \dot{\omega} = \frac{l}{2\rho J_c}(\tau_R - \tau_L). \end{cases} \quad (14)$$

Соотношения (14) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно фазового вектора с компонентами  $(V, \omega)^T$ , а  $\tau_R, \tau_L$  – компоненты вектора управления, порождающие движение системы.

Таким образом, нелинейная математическая модель автономного мобильного робота может быть описана системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \varphi, \\ \dot{y} = V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{V} = \frac{1}{\rho m} (\tau_R + \tau_L), \\ \dot{\omega} = \frac{l}{2\rho J_c} (\tau_R - \tau_L). \end{cases} \quad (15)$$

Далее исследуем уравнения движения мобильного робота с учетом динамики следящих приводов. Рассмотрим случай, когда колёса платформы через редукторы управляются непосредственно двигателями постоянного тока с независимым возбуждением (рис.3).

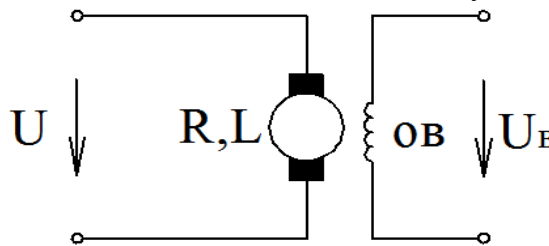


Рис. 3. Схема замещения электродвигателя

Покажем, что учёт наличия следящих приводов не влечёт принципиальных сложностей. Известно, что составленное по II закону Кирхгофа уравнение баланса напряжений одного электродвигателя (ЭД) постоянного тока имеет вид

$$L\dot{I} + RI + K_w \omega_w = U, \quad (16)$$

где  $L$  – индуктивность цепи якоря;  $I$  – ток, протекающий в обмотке якоря;  $R$  – активное сопротивление обмотки якоря;  $\omega_w$  – угловая скорость вращения вала ЭД;  $U$  – напряжение питания обмотки якоря.

Угловые скорости вращения вала ЭД  $\omega_m$  и колес связаны соотношением

$$\omega_m = \omega_w i_p, \quad (17)$$

где  $i_p$  – передаточные отношения редукторов.

Выражение для момента  $\tau$ , развиваемого ЭД, имеет вид

$$\tau = K_M I. \quad (18)$$

Здесь  $K_M$ ,  $K_w$  – приведенные конструктивные постоянные ЭД по электромагнитному моменту и угловой скорости его вращения. Тогда, учитывая соотношения (17)-(18), представим уравнение (16) в виде

$$\dot{i} = -\frac{R}{L} \tau - \frac{K_M K_w i}{L} \omega_w + \frac{K_M}{L} U. \quad (19)$$

Так как для правого и левого колес отдельно используются два ЭД постоянного тока, то имеем

$$\begin{cases} \dot{i}_L = -\frac{R}{L} \tau_L - \frac{K_M K_w i}{L} \omega_L + \frac{K_M}{L} U_L, \\ \dot{i}_R = -\frac{R}{L} \tau_R - \frac{K_M K_w i}{L} \omega_R + \frac{K_M}{L} U_R. \end{cases} \quad (20)$$

Формулы (20) записаны в предположении, что характеристики правого и левого ЭД одинаковы, что на практике совсем не обязательно. Выразим теперь угловые скорости вращения колес  $\omega_L$  и  $\omega_R$  через фазовые координаты. Для этого воспользуемся соотношениями (4) с учетом того, что  $V_L = \omega_L \rho$  и  $V_R = \omega_R \rho$ :

$$\begin{aligned}\omega_R &= \frac{1}{\rho} \left( V + \frac{\omega l}{2} \right), \\ \omega_L &= \frac{1}{\rho} \left( V - \frac{\omega l}{2} \right).\end{aligned}\tag{21}$$

Подставим уравнения (21) в соотношения (20) и дополним систему уравнений (15). В результате получим полную математическую модель динамики мобильного робота с учетом следящих приводов

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{V} &= \frac{1}{\rho m} (\tau_R + \tau_L), \\ \dot{\omega} &= \frac{l}{2\rho J_c} (\tau_R - \tau_L), \\ \dot{t}_L &= -\frac{R}{L} \tau_L - \frac{K_M K_W i}{\rho L} \left( V - \frac{\omega l}{2} \right) + \frac{K_M}{L} U_L, \\ \dot{t}_R &= -\frac{R}{L} \tau_R - \frac{K_M K_W i}{\rho L} \left( V + \frac{\omega l}{2} \right) + \frac{K_M}{L} U_R. \end{aligned} \right.\tag{22}$$

Модель динамики (22) представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений седьмого порядка с фазовым вектором  $(x, y, V, \varphi, \omega, \tau_L, \tau_R)^T$  и вектором управления  $(U_L, U_R)^T$  и может быть непосредственно использована при моделировании на любом алгоритмическом языке программирования. Однако для синтеза законов управления роботом необходимы другие формы представления его математической модели.

**3. Синтез алгоритмов управления движением мобильного робота по методу обратных задач динамики.** Заметим, что в системе уравнений (22) только четыре последние уравнения являются зависимыми между собой, а три первые уравнения представляют собой уравнения связи. Продифференцируем шестое и седьмое уравнения в системе (22) и с учетом подстановки в них четвертого и пятого уравнений получим

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{t}_L + a_{11} \dot{t}_L + \left( a_{12} \frac{1}{\rho m} - \frac{l^2}{4\rho J_c} \right) \tau_R + \left( a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_c} \right) \tau_L &= b_{11} \dot{U}_L, \\ \ddot{t}_R + a_{11} \dot{t}_R + \left( a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_c} \right) \tau_R + \left( a_{12} \frac{1}{\rho m} - \frac{l^2}{4\rho J_c} \right) \tau_L &= b_{11} \dot{U}_R, \end{aligned} \right.\tag{23}$$

где обозначено:  $a_{11} = \frac{R}{L}$ ,  $a_{12} = \frac{K_M \cdot K_W \cdot i_p}{\rho L}$ ,  $b_{11} = \frac{K_M}{L}$ ,  $\tau_L$ ,  $\tau_R$  – моменты, развиваемые соответственно левым и правым колесом робота (переменные состояния);  $\dot{U}_L$ ,  $\dot{U}_R$  – скорости изменения напряжения питания (управляющий параметр).

Конструктивные параметры трехколесного автономного мобильного робота (рис.4) представлены в табл. 1.



Рис. 4. Внешний вид робота

**Таблица 1.** Конструктивные параметры мобильного робота

Параметры	$m$ , кг	$J_C$ , кгсм <sup>2</sup>	$\rho$ , м	$l$ , м	$K_W$	$R$ , Ом	$L$ , Гн	$i_p$
Числовые значения	1	2,25 $\times 10^{-4}$	0,0325	0,135	0,0209	0,36	1,23 $\times 10^{-3}$	55,74

В табл. 1 обозначены:  $R, L$  – активное сопротивление и индуктивность обмотки якоря ЭД постоянного тока;  $l$  – длина оси;  $\rho$  – радиус колес;  $m$  – масса платформы;  $i_p$  – передаточное число редуктора;  $J_C$  – момент инерции платформы относительно центра масс. При синтезе законов управления по методу обратных задач динамики [9] математическая модель робота (23) принимается за объект управления.

В матричном виде система уравнений (23) имеет вид

$$\ddot{X} + C\dot{X} + DX = Bu, \quad (24)$$

где  $X = (\tau_L, \tau_R)$  – вектор состояния системы;

$u = (\dot{U}_L, \dot{U}_R)$  – вектор управления;

$C = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix} = \text{diag}\{a_{11}, a_{11}\}$  – диагональная матрица;

$D = \begin{bmatrix} a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C} & a_{12} \frac{1}{\rho m} - \frac{l^2}{4\rho J_C} \\ a_{12} \frac{1}{\rho m} - \frac{l^2}{4\rho J_C} & a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C} \end{bmatrix}$  – симметричная матрица ( $D^{-1} = D^T$ );

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{11} \end{bmatrix} = \text{diag}\{b_{11}, b_{11}\}$  – диагональная матрица эффективности управления.

Таким образом, в этом случае мобильный робот как объект управления является много-связной (число входов  $m=2$ ), многомерной ( $n=2$ ) системой.

Сформулируем теперь задачу синтеза управлений стабилизации (гашения) угловых скоростей мобильного робота на интервале времени  $[t_0, t_k]$ , полагая  $t_0 = 0$ , а момент  $t_k$  нефиксированной величиной.

Пусть в текущий момент времени  $t = t_0 = 0$  состояние управляемой по моментам  $\tau_1 = \tau_L, \tau_2 = \tau_R$  системы (22) или (23) характеризуется значениями  $\tau_i(0) = \tau_{i0} (i = 1, 2)$ . Требуется найти такие управляющие воздействия  $\dot{U}_i (\dot{U}_1 = \dot{U}_L, \dot{U}_2 = \dot{U}_R)$ , при которых система (24) переходит из исходного состояния  $\tau_{i0}$  в новое состояние  $\tau_{i\text{зад}}$  (в общем случае  $\tau_{i\text{зад}} = \tau_{i\text{зад}}(t)$  определяет задаваемые моменты вращения колёс мобильного робота во времени) и находится в этом состоянии бесконечно долго. При этом необходимо, чтобы моменты вращения управляемого движения по каждой степени свободы с требуемой точностью следовали за моментами, определяемыми эталонной моделью

$$\ddot{X}_{\text{ЭТ}i} + C_i \dot{X}_{\text{ЭТ}i} + D_i X_{\text{ЭТ}i} = D_i \tau_{i\text{зад}}, \quad (25)$$

где коэффициенты  $C_i, D_i$  определялись ранее.

Заданное эталонное движение определяется из условия заданного изменения напряжения питания на зажимах обмотки якоря правого и левого ЭД

$$B_i \dot{U}_{i\text{зад}} = D_i \tau_{i\text{зад}}, i = 1, 2. \quad (26)$$

Изменение напряжения питания осуществляется с помощью ШИМ путем изменения скважности импульсов. Считается, что эталонное движение устойчиво  $X_{\text{ЭТ}i} \rightarrow \tau_{i\text{зад}}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Степень приближения управляемого процесса к эталонной модели  $X_{\text{ЭТ}i}(t) \rightarrow \tau_{i\text{зад}}$  оценивается функционалом

$$G(\dot{U}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 [\ddot{X}_{ЭТi} - \ddot{X}_i(t, \dot{U}_i)]^2, \quad (27)$$

который характеризует изменение момента вращения колёс мобильного робота в окрестности изменения эталонного момента вращения.

Законы управления  $\dot{U}_i(X)$  по каждой степени свободы вращения колёс определяем по схеме простого градиента

$$\frac{\partial \dot{U}_i(X)}{\partial t} = - \sum_{j=1}^2 r_{ij} \frac{\partial G(\dot{U})}{\partial \dot{U}_j}, \quad r_{ij} = const \quad (28)$$

В соответствии с формулами (24), (27) компоненты градиента в (28) равны

$$\frac{\partial G(\dot{U})}{\partial \dot{U}_j} = -b_{11}(\ddot{X}_{ЭТj} - \ddot{X}_j), \quad j = 1,2; \quad (29)$$

Отсюда следует, что

$$\ddot{U}_i(X) = \sum_{j=1}^2 r_{ij} b_{11}(\ddot{X}_{ЭТj} - \ddot{X}_j) \quad (30)$$

Интегрируя по времени обе части последнего выражения, окончательно получим требуемый закон управления (регулирования), питающего цепь якоря электродвигателей, напряжения

$$U_i = \sum_{j=1}^2 r_{ij} b_{11}(X_{ЭТj} - X_j), \quad i = 1,2; \quad (31)$$

где требуемые значения моментов  $X_{ЭТj}$  вычисляются по формуле (25). Структура матрицы  $R = \|r_{ij}\|$  определяется характером перекрёстных связей по переменной  $X_j$  в формуле (22) или (23)

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix},$$

причём  $r_{12} = r_{21}$ . Принимаем  $R = R^T > 0$ , тогда  $G(\dot{U}) < 0$  и замкнутая регулятором (31) система (22) асимптотически устойчива по Ляпунову:  $\ddot{X}_{ЭТj} \rightarrow \ddot{X}_j$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**4. Управление движением мобильного робота по методике модального ПИД-регулирования.** Для применения методики синтеза модального ПИД-регулятора [10] и построения Simulink-моделей в среде программирования Matlab необходимо привести математическую модель робота (23) к операторному виду [11, 12].

а) Частный случай операторной модели робота.

Пусть в исходной модели (23) выполняется условие синхронизации движения колёс:  $\tau_R = \tau_L$ . Тогда задается угловая скорость  $\omega = \omega_{Зад} = const$ , а угол поворота колёс  $\varphi = \omega t$ . Это условие выполняется, если в уравнениях (23) модели робота положить

$$d_{12} = a_{12} \frac{1}{\rho m} - \frac{l^2}{4\rho J_c} = 0.$$

При конструировании робота здесь возможны два подхода:

1. Используются стандартные ЭД постоянного тока. Тогда из условия синхронизации целесообразно выбрать длину оси передних ведущих колёс робота

$$l = \sqrt{\frac{4K_M^2 i_p J_c}{\rho L m}}.$$



2. Длина оси передних ведущих колес  $l$  жестко задана и требуется выбрать характеристики ЭД постоянного тока. Тогда из условия синхронизации выбираются обмоточный коэффициент и конструктивные параметры ЭД

$$K_M = K_W = \frac{l^2}{4i_p J_c}.$$

В обоих случаях уравнения в модели (23) могут быть рассмотрены независимо ( $\tau = \tau_R = \tau_L$ )

$$\ddot{\tau} + a_{11}\dot{\tau} + \left( a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_c} \right) \tau = b_{11} \dot{U}$$

где  $\dot{U}_R = \dot{U}_L = \dot{U}$ .

Далее последнее уравнение через замену переменных приводится к нормальной форме Коши ( $\tau = x_1, \dot{\tau} = x_2$ )

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = - \left( a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_c} \right) x_1 - a_{11} x_2 + b_{11} \dot{U} \end{cases} \quad (32)$$

или в матричном виде

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где  $x = (x_1, x_2)^T$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_c}\right) & -a_{11} \end{bmatrix}$ ,  $B = (0, b_{11})^T$ ,  $u = \dot{U}$ .

Применим к уравнениям (32) непрерывное преобразование Лапласа:

$$A^*(p)x(p) = Bu(p),$$

где

$$A^*(p) = (Ip - A) = \begin{bmatrix} p & -1 \\ a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_c} & p + a_{11} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Решение системы алгебраических операторных уравнений определяем по формулам Крамера

$$x_{ij}(p) = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta(p)} u_j(p), \quad i = 1, n; j = 1, m.$$

В нашем случае  $n = 2, m = 1$ . Поэтому система является многомерной ( $n = 2$ ), но односвязной ( $m = 1$ ). Её детерминант не равен нулю

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_c} & p + a_{11} \end{vmatrix} = p^2 + a_{11}p + a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_c} \neq 0$$

и поэтому система имеет единственное решение (матрица  $A^*(p)$  невырожденная).

В рассматриваемом случае частные определители и передаточные функции равны:

$$\begin{aligned} \Delta_{11}(p) &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ b_{11} & p + a_{11} \end{vmatrix} = b_{11}, \quad \Delta_{21}(p) = \begin{vmatrix} p & 0 \\ a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_c} & b_{11} \end{vmatrix} \\ &= pb_{11} \\ W_{11}(p) &= W_{\dot{\tau}}(p) = \frac{b_{11}}{p^2 + a_{11}p + a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_c}}, \end{aligned}$$

$$W_{21}(p) = W_{\tau}(p) = pW_{11}(p) = pW_{\dot{\tau}}(p),$$

$$\dot{U} = \frac{2}{\rho m} \tau, \quad W_{\frac{\tau}{\ddot{U}}}(p) = \frac{\frac{2}{\rho m} b_{11}}{p^2 + a_{11}p + a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C}}$$

б) Общий случай операторной модели робота.

Аналогично частному случаю приведем матричные уравнения (24) к нормальной форме Коши через замену переменных ( $x = x_1, \dot{x} = x_2$ )

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -Dx_1 - Cx_2 + bu. \end{cases}$$

В блочной форме последние формулы принимают вид

$$\dot{Y} = AY + Bu,$$

где  $Y = (x_1, x_2)^T$  – обобщенный вектор состояния размера (4x1);

$u = (\dot{U}_L \dot{U}_R)$  – вектор управления размерности 2x1;

$A = \begin{bmatrix} O_{(2 \times 2)} & I_{(2 \times 2)} \\ -D_{(2 \times 2)} & -C_{(2 \times 2)} \end{bmatrix}$  – блочная матрица при векторе состояния размера 4x4;

$B = \begin{bmatrix} O_{(2 \times 2)} \\ b_{(2 \times 2)} \end{bmatrix}$  – блочная матрица при векторе управления размера 4x2.

Преобразуем систему дифференциальных уравнений в алгебраические уравнения, используя преобразование Лапласа

$$A^{**}(p)Y(p) = Bu(p),$$

где  $A^{**}(p) = (Ip - A) = \begin{bmatrix} I_{(2 \times 2)}p & -I_{(2 \times 2)} \\ D & I_{(2 \times 2)}p + C \end{bmatrix}$ ,  $I_{(2 \times 2)}$  – единичная матрица размера 4x4.

Так как  $\Delta(p) = \det A^{**}(p) \neq 0$ , то система является невырожденной и имеет единственное решение, определяемое через наибольший общий делитель нуля [13-14]

$$Y_{ij}(p) = \frac{\Delta_{ij}(p) \text{НОД}_j(p)}{\Delta(p)} u_j(p), \quad i = 1, n; j = 1, m.$$

В нашем случае  $n = 4, m = 2$ . Поэтому робот как объект управления является многомерным и многосвязным (многоконтурным). Здесь частный определитель равен  $\Delta_{ij}(p) = \det A_{ij}^*(p)$ , а матрица  $A_{ij}^*(p)$  определяется через замену в матрице  $A^{**}(p)$   $i$ -го столбца на  $j$ -ый столбец свободных членов. Общее решение при  $m$  управляющих воздействиях можно получить как суперпозицию частных решений

$$x_i(p) = \sum_{j=1}^m x_{ij}(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_{ij}(p) \text{НОД}_j(p)}{\Delta(p)} u_j = \sum_{j=1}^m W_{ij}(p) u_j,$$

где  $\text{НОД}_j(p)$  – наибольший общий делитель по  $j$ -ому входу управления. Таким образом, здесь нужно говорить об обобщенном управлении  $u$  и матричных передаточных функциях числителя и знаменателя.

Передаточные функции от управляющих воздействий к моментам правого и левого колеса определяются по формулам:

$$W_{\frac{\tau_R}{\ddot{U}_R}}(p) = \frac{\Delta_{11} \text{НОД}_1(p)}{\Delta(p)},$$

где  $\Delta_{11} = b_{11}$ ,

$$\text{НОД}_1(p) = \text{НОД}_L(p) = p^2 + a_{11}p + d_{11} - d_{12} = p^2 + a_{11}p + \frac{l^2}{2\rho J_C};$$

$$W_{\frac{\tau_L}{\ddot{U}_L}}(p) = \frac{\Delta_{12} \text{НОД}_2(p)}{\Delta(p)},$$

где  $\Delta_{12} = b_{11}$ ,

$$\text{НОД}_2(p) = \text{НОД}_R(p) = p^2 + a_{11}p + d_{11} + d_{12} = p^2 + a_{11}p + \frac{2a_{12}}{2\rho t};$$

$$\Delta(p) = \text{НОД}_1(p)\text{НОД}_2(p) = (p^2 + a_{11}p + d_{11} + d_{12}) \times$$

$$\times (p^2 + a_{11}p + d_{11} - d_{12}) = \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{2K_W^2 i_p}{\rho^2 L m}\right) \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{l^2}{2\rho J_C}\right).$$

$$W_{\frac{\tau_L}{U_L}}(p) = \frac{b_{11}}{p^2 + a_{11}p + d_{11} - d_{12}} = \frac{b_{11}}{p^2 + a_{11}p + \frac{l^2}{2\rho J_C}};$$

$$W_{\frac{\tau_R}{U_R}}(p) = \frac{b_{11}}{p^2 + a_{11}p + d_{11} + d_{12}} = \frac{b_{11}}{p^2 + a_{11}p + \frac{2K_W^2 i_p}{L\rho^2 m}}.$$

На основе математической модели (23) и полученных передаточных функций была разработана Simulink-модель управляемого мобильного робота (рис. 5) с параметрами, выбранными из табл. 1.

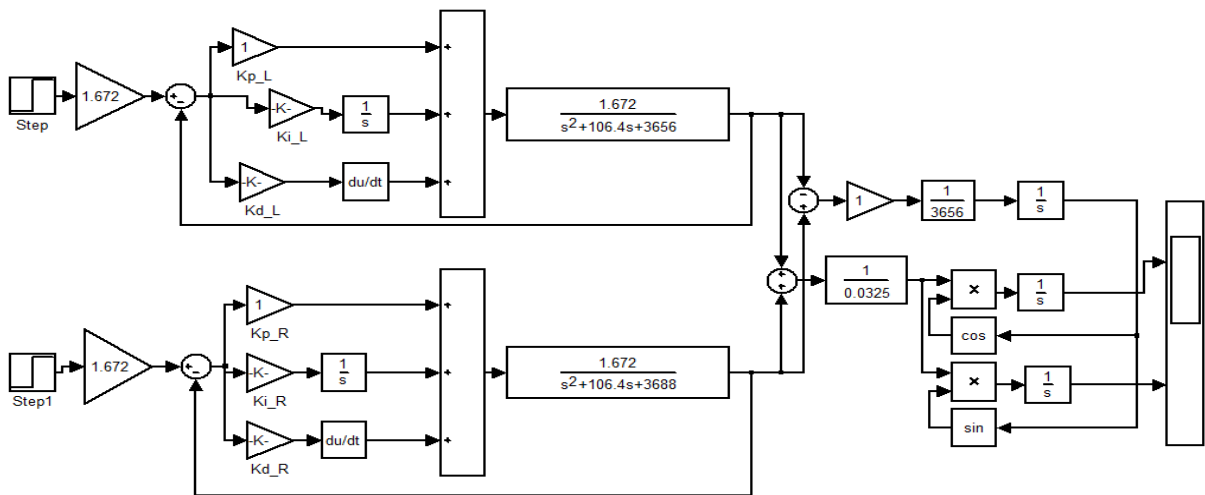


Рис. 5. Simulink-модель автономного мобильного робота

Коэффициенты модального ПИД-регулятора выбирались по методике, изложенной в работе [15]:  $K_p=1$ ,  $K_i=55.24$ ,  $K_d=0.008$  – для управления левым колесом;  $K_p=1$ ,  $K_i=39.28$ ,  $K_d=0.006$  – для управления правым колесом робота. Графики переходных процессов управляющих моментов  $\tau_L, \tau_R$  от времени  $t$  представлены на рис. 6.

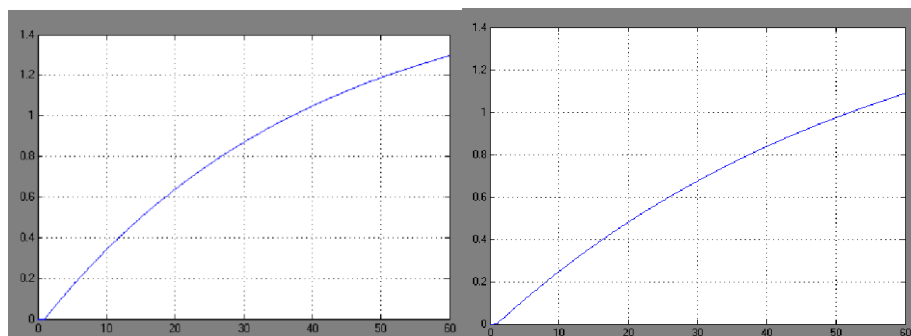


Рис. 6. Управляющие моменты колесной парой мобильного робота

**Заключение.** Таким образом, в работе получены следующие основные результаты: разработаны математические модели мобильного робота в пространстве состояний и в операторной форме; синтезирован алгоритм управления движением робота на основе метода обратных задач динамики; разработана Simulink-модель управляемого мобильного робота на основе методики модального ПИД-регулирования.

### Список источников

1. Сизых В.Н. Алгоритмы управления мобильным роботом по методу обратных задач динамики / В.Н. Сизых, М.В. Баканов // Инфраструктура и эксплуатация наземного транспорта. – Нижний Новгород, 2019. – С. 139-144.
2. Антошкин С.Б. Система управления автономного робота на основе метода обратных задач динамики / С.Б. Антошкин, М.В. Баканов, В.Н. Сизых // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование, 2019. – 2 (62). – С. 15-23.
3. Ким Д.П. Алгебраический метод синтеза линейных непрерывных систем управления / Д.П. Ким // Мехатроника, автоматизация, управление, 2011. – № 1. – С. 9-15.
4. Сизых В.Н. Модальное управление мобильным роботом при дифференциальном отклонении колесной пары / В.Н. Сизых, М.В. Баканов // Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами. 2019. – № 1 (2). – С. 62-71.
5. Сизых В.Н. Математическая модель для адаптивного управления трёхколёсным мобильным роботом / В.Н. Сизых, М.В. Баканов // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. Материалы I международной научно-практической конференции, 2018. – С. 9-18.
6. Данеев А.В.. К апостериорному моделированию нестационарных гиперболических систем / А.В. Данеев, В.А. Русанов, М.В. Русанов [и др.] // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, 2018. – № 1 (81). – С. 106-113.
7. Сизых В.Н. Ассоциативный автомат адаптивного управления технологическими процессами на основе нейронных сетей / В.Н. Сизых, А.Ю. Мухопад // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета, 2014. – № 1(54). – С. 34-45.
8. Сизых В.Н. Алгоритмы управления мобильным роботом на основе метода обратных задач динамики / В.Н. Сизых, М.В. Баканов, И.И. Белобров [и др.] // Транспортная инфраструктура Сибирского региона, 2019. – Т. 1. – С. 284-288.
9. Булгаков В.В. Сравнительный анализ формализованных методов синтеза регулятора следящей системы / В.В. Булгаков., В.С. Кулабухов // Приборы, 2013. – № 1(151). – С. 39-44.
10. Quevedo J., Escobet T. Digital control: past, present and future of PID control. Proc. IFAC Workshop. Terassa, Spain, Apr. 5-7, 2000.
11. Ziegler J.G., Nichols N.B. Optimum setting for automatic controllers .Trans. ASME, 1942, no. 64, pp. 759-768.
12. Farhan A.S. New efficient model-based PID design method . European Scientific Journal Edition, 2013, no. 9(15), pp. 181-190.
13. Ануфриев И.Е. MATLAB 7 / И.Е. Ануфриев., А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – С. 386-403.
14. Лазарев Ю.Н. Моделирование процессов и систем в MATLAB / Ю.Н. Лазарев. – СПб.: Питер, 2005. – 512 с.
15. Агеев А.М. Синтез оптимальных регуляторов системы управления самолетом через решение обратной задачи АКОР / А.М. Агеев, В.Н. Сизых // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета, 2014. – № 3 (56). – С. 7-22.

**Баканов Максим Витальевич**, аспирант, Иркутский государственный университет путей сообщения, [taximbakanov@mail.ru](mailto:taximbakanov@mail.ru), 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15.

**Данеев Алексей Васильевич**, д.т.н., профессор, профессор кафедры «Информационные системы и защита информации», Иркутский государственный университет путей сообщения, [daneev@mail.ru](mailto:daneev@mail.ru), 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15.

**Сизых Виктор Николаевич**, д.т.н., профессор, профессор кафедры автоматизации производственных процессов, Иркутский государственный университет путей сообщения, [sizykh\\_vn@mail.ru](mailto:sizykh_vn@mail.ru), 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15.

UDC 681.5

DOI: 10.38028/ESI.2022.26.2.014

## Algorithmic support of an adaptive control system for an autonomous mobile robot

Maxim V. Bakanov, Aleksey V. Daneev, Victor N. Sizykh

Irkutsk State transport University, Russia, Irkutsk, *daneev@mail.ru*

**Abstract.** The article develops mathematical models of a three-wheeled mobile robot based on the apparatus of state variables and in operator form, on the basis of which the synthesis of its adaptive control system is carried out using the method of constructing modal PID controllers and the method of inverse problems of dynamics. The mathematical model allows, without hardware implementation of a mobile robot, to analyze the work of the created control system and, if necessary, make the necessary corrections. The mathematical model of a mobile robot consists of kinematic and dynamic models. The kinematic model is the simplest description of the behavior of a mobile robot and allows the study of its properties. The dynamic model is a more detailed description of the mobile robot and takes into account the force and moment effects produced by the actuators. In order to mathematically describe the mobile robot, a number of conditions are introduced, formulated as the following assumptions: 1) the mobile robot is considered under the condition that its mechanism is rigidly connected; 2) the wheels are non-deformable and are in point contact with the surface; 3) the movement of the robot is carried out without slipping; 4) the platform is considered as a solid body on which the wheel system is fixed. The paper presents the following results of the study: developed mathematical models of a mobile robot in the state space and in operator form; the robot motion control algorithm was synthesized based on the method of inverse problems of dynamics; a Simulink model of a controlled mobile robot was developed based on the modal PID control technique. The stability of the control system is ensured by introducing an external negative feedback on the angular velocity of the robot platform. The simulation results show that, compared with an accurate continuous mathematical model of robot control, the errors in coordinates, angular and linear velocities and moments are 5-7%, which allows us to draw a conclusion on the acceptability of the developed digital robot model, its accurate continuous analogue.

**Keywords:** autonomous mobile robot, mathematical models in the state space and in operator form, modal PID controller, method of inverse problems of dynamics

### References

1. Sizykh V.N., Bakanov M.V. Algoritmy upravleniya mobil'nym robotom po metodu obratnykh zadach dinamiki [Algorithms for controlling a mobile robot by the method of inverse dynamics problems]. *Infrastruktura i ekspluatatsiya nazemnogo transporta* [Infrastructure and operation of ground transport]. Nizhny Novgorod, 2019, pp. 139-144.
2. Antoshkin S.B., Bakanov M.V., Sizykh V.N. Sistema upravlenija avtonomnogo robota na osnove metoda obratnykh zadach dinamiki [Control system of an autonomous robot based on the method of inverse problems of dynamics]. *Sovremennye tehnologii. Sistemnyj analiz. Modelirovanie* [Modern technologies. System analysis. Modeling], 2019, 2 (62), pp. 15-23.
3. Kim D.P. Algebraicheskij metod sinteza linejnyh nepreryvnyh sistem upravlenija [Algebraic method of synthesis of linear continuous control systems]. *Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie* [Mechatronics, automation, control], 2011, no. 1, pp. 9-15.
4. Sizykh V.N., Bakanov M.V. Modal'noe upravlenie mobil'nym robotom pri differencial'nom otklonenii koleznoj pary [Modal control of a mobile robot with differential deflection of a wheelset]. *Informacionnye tehnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnymi sistemami* [Information technologies and mathematical modeling in the management of complex systems], 2019, no. 1 (2), pp. 62-71.
5. Sizykh V.N., Bakanov M.V. Matematicheskaja model' dlja adaptivnogo upravlenija trjohkoljosnym mobil'nym robotom [Mathematical model for adaptive control of a three-wheeled mobile robot]. *Transportnoe, gornoe i stroitel'noe mashinostroenie: nauka i proizvodstvo. Materialy I mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj kon-*

- ferencii [Transport, mining and construction engineering: science and production. Materials of the I International Scientific and Practical Conference], 2018, pp. 9-18.
6. Daneev A.V., Rusanov V.A., Rusanov M.V., Sizykh V.N. K aposteriornomu modelirovaniyu nestacionarnykh giperbolicheskikh system [To a posteriori modeling of nonstationary hyperbolic systems]. Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk [Izvestiya Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2018, no. 1 (81), pp. 106-113.
  7. Sizykh V.N., Mukhopad A. Yu. Associativnyj avtomat adaptivnogo upravlenija tehnologicheskimi processami na osnove nejronnyh setej [Associative automaton of adaptive control of technological processes based on neural networks]. Nauchnyj vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta [Scientific Bulletin of Novosibirsk State Technical University], 2014, no. 1(54), pp. 34-45.
  8. Sizykh V.N., Bakanov M.V., Belobrov I.I. Algoritmy upravlenija mobil'nym robotom na osnove metoda obratnyh zadach dinamiki [Algorithms for controlling a mobile robot based on the method of inverse dynamics problems]. Transportnaja infrastruktura Sibirskogo regiona [Transport infrastructure of the Siberian region], 2019, vol. 1, pp. 284-288.
  9. Bulgakov V.V., Kulabukhov V.S. Sravnitel'nyj analiz formalizovannykh metodov sinteza reguljatora sledjashhej sistemy [Comparative analysis of formalized synthesis methods the regulation of the tracking system]. Pribory [Devices], 2013, no. 1(151), pp. 39-44.
  10. Quevedo J., Escobet T. Digital control: past, present and future of PID control. Proc. IFAC Workshop. Terasa, Spain, Apr. 5-7, 2000.
  11. Ziegler J.G., Nichols N.B. Optimum setting for automatic controllers. Trans. ASME, 1942, no. 64, pp. 759-768.
  12. Farhan A.S. New efficient model-based PID design method .European Scientific Journal Edition, 2013, no. 9(15), pp.181-190.
  13. Anufriev I.E., Smirnov A.B., Smirnova E.N. MATLAB 7. SPb., BHV-Petersburg, 2005, pp. 386-403.
  14. Lazarev Yu.N. Modelirovanie processov i sistem v MATLAB [Modeling of processes and systems in MATLAB]. St. Petersburg, Peter, 2005, 512 p.
  15. Ageev A.M., Sizykh V.N. Sintez optimal'nykh reguljatorov sistemy upravlenija samoletom cherez reshenie obratnoj zadachi AKOR [Synthesis of optimal regulators of the aircraft control system through the solution of the inverse AKOR problem]. Nauchnyj vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta [Scientific Bulletin of Novosibirsk State Technical University], 2014, no. 3 (56), pp. 7-22.

**Bakanov Maxim Vitalievich**, post-graduate student, Irkutsk State University of Railways, maximbakanov@mail.ru, 664074, Irkutsk, st. Chernyshevsky, 15.

**Daneev Aleksey Vasilyevich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department "Information Systems and Information Security", Irkutsk State University of Communications, daneev@mail.ru, 664074, Irkutsk, st. Chernyshevsky, 15.

**Sizykh Viktor Nikolaevich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Automation of Production Processes, Irkutsk State University of Railways, sizykh\_vn@mail.ru, 664074, Irkutsk, st. Chernyshevsky, 15.

*Статья поступила в редакцию 16.04.2022; одобрена после рецензирования 20.05.2022; принята к публикации 14.06.2022.*

*The article was submitted 04/16/2022; approved after reviewing 05/20/2022; accepted for publication 06/14/2022.*