

Исследование влияния параметров математической модели двумерной стационарной конвективной диффузии на расчеты концентрации осаждающихся твердых частиц в канале

Тукмаков Дмитрий Алексеевич

Федеральный исследовательский центр Казанский научный центр РАН,

Россия, Казань, *tukmakovda@imm.knc.ru*

Аннотация. В работе исследуется влияние различных параметров математической модели диффузии на результаты расчетов конвективной диффузии дисперсной примеси в жидкости. Необходимость исследования и моделирования диффузионных процессов дисперсных примесей связана с экологическими проблемами углубления русла рек. Природные условия на рыбохозяйственных водоемах подвергаются отрицательному воздействию в результате проводимых гидротехнических работ. В данной работе представлены результаты теоретического исследования диффузии твердой примеси, оценивается влияние как различных подходов в моделировании, так и параметров дисперсных сред. Уравнения математической модели выведены из уравнения конвективной диффузии в двумерном нестационарном виде. Водоток предполагается прямолинейным, постоянной глубины, с постоянной средней продольной скоростью, при этом поперечная и вертикальная осредненные скорости водотока считают равными нулю. Ось Ox направлена вдоль берега в сторону течения, ось Oz – вертикально вверх, ось Oy – поперек потока. Предполагается, что точечный источник сохраняет свою интенсивность достаточно долго, чтобы можно было решать задачу в стационарном приближении. После применения упрощений получена плоская математическая модель стационарной диффузии. Методом разделения переменных, в виде ряда Фурье, получено решение для совокупности уравнений математической модели диффузии нескольких фракций частиц. Решение реализовано в виде компьютерной программы. С ее использованием определено влияние различных параметров модели (скорости осаждения частиц, учета седиментации частиц, линейного размера частиц дисперсной примеси) на результаты расчетов диффузии дисперсной примеси в продольном и поперечном направлениях.

Ключевые слова: математическое моделирование, диффузия, неоднородные среды, дисперсная взвесь.

Цитирование: Тукмаков Д.А. Исследование влияния параметров математической модели двумерной стационарной конвективной диффузии на расчеты концентрации осаждающихся твердых частиц в канале / Д.А.Тукмаков // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2022. – № 2(26). – С. 31-41. – DOI:10.38028/ESI.2022.26.2.003.

Введение. Моделирование динамических процессов примесей в различных жидкостях и газах связано с проблемами промышленной экологии. Необходимость исследования и моделирования диффузионных процессов дисперсных примесей в водотоках возникает по причине экологических проблем углубления русла рек. Природные условия в водоемах подвергаются отрицательному воздействию в результате проводимых гидротехнических работ. Добыча песчано-гравийных смесей в руслах рек приводит к загрязнению водотоков взвешенными веществами и, соответственно, к повышению мутности, оказывающей отрицательное воздействие на водные экосистемы. В результате таких работ в биоценозах происходит снижение их продуктивности, истощаются запасы рыб, снижается их видовой состав. В данной работе представлены результаты теоретического исследования диффузии твердой примеси, оценивается влияние как различных подходов в моделировании, так и параметров дисперсных сред. В монографии [1] представлены методики аналитического расчета уравнений математической физики, в том числе уравнений диффузионного типа. Монография [2] посвящена разработке методики моделирования аэродисперсных взвесей, что связано с проблемами промышленной экологии. В статье [3] предложена математическая модель количественного определения оседающей полидисперсной взвеси в отделах дыхательного тракта человека при использовании средств индивидуальной защиты органов дыхания. Работы [4-7] по-

священы теоретическому исследованию массопереноса в неоднородных средах. В статье [8] с помощью программного пакета «ANSYS Fluent» на основе метода конечных объемов численного решения уравнений Навье-Стокса определены гидродинамические характеристики системы удаления льда, демонстрируется возможность реализации системы удаления льда за счет использования насосов, предназначенных для заполнения и осушения балластных отсеков докового комплекса. Публикация [9] посвящена изучению последствий дноуглубительных работ в прибрежных водах (образование пятен мутности и распространение взвешенных веществ по акватории), а также рассчитываются значения параметров, характеризующих условия перераспределения взвешенных веществ в толще воды и на поверхности дна. Работа [10] посвящена изучению влияния скорости седиментации частиц на загрязнение проточных и стоячих водоемов. В качестве критерия загрязнения рассматривается показатель мутности воды. Получено качественное соответствие результатов моделирования данным натурных измерений. Показано влияние атмосферных параметров на пространственно-временное распределение мутности воды в стоячем водоёме. Исследование [11] посвящено моделированию концентрации взвешенных в воде веществ. Получена карта распространения максимальной мутности, позволяющая оценить области акватории с наиболее неблагоприятными гидродинамическими условиями, что может стать основой для последующих рекомендаций по мероприятиям, связанным с дноуглубительными работами. В статье [12] рассматриваются различные методики расчета скорости осаждения частиц, изучается влияние размера частиц на скорость их осаждения. Работа [13] посвящена математическому моделированию загрязнения дисперсными примесями в процессе гидротехнических работ. Статья [14] посвящена исследованию влияния параметров водотока на результаты расчета конвективной диффузии в проточном водоёме. В работе [15] получена трехмерная по пространственным координатам нестационарная математическая модель диффузии примеси в океане. В статье [16] методом конечных разностей получено численное решение уравнений в частных производных, описывающих стационарную диффузию дисперсной примеси. В работе [17] рассматривается задача моделирования переноса взвешенных веществ в водных объектах в тех случаях, когда размер ареала их распространения значительно превышает глубину акватории. Формулируется и анализируется модель горизонтального рассеяния загрязняющих субстанций. Обсуждаются вычислительные подходы к расчету переноса взвешенных веществ в водной среде. Публикация [18] посвящена исследованию процесса моделирования зон загрязнения взвесью в водной среде с помощью универсального программного комплекса «ANSYS Fluent». Приводятся данные об особенностях процесса моделирования в больших и малых водотоках. Изучается устойчивость получаемого решения в зависимости от характеристик сеточной модели. В статье [19] разработана нестационарная квазитрехмерная математическая модель для воспроизведения гидродинамических процессов распространения примеси загрязняющих веществ в озере, в которое втекает река. Уравнения математической модели интегрировались конечно-разностным методом. Результаты расчетов продемонстрировали, что на начальном этапе моделирования загрязнение, поступающее вместе со стоком реки, распространяется в глубинную область озера, а затем, когда происходит интенсивный прогрев вод притока и поверхности водоема, концентрация максимальных значений мутности наблюдается в верхних слоях озера. Исследование [20] посвящено разработке трехмерной нестационарной математической модели диффузии твердой примеси в проточной воде. Работа [21] посвящена разработке методик расчета загрязнения примесями водоемов, представлены значения коэффициента шероховатости для проточных водоемов различных типов. Монография [22] посвящена разработке общей теории и методики расчетов загрязнения водоемов растворимыми и нерастворимыми веществами.

В данной работе на основе математической модели двумерной стационарной диффузии методом разделения переменных получено аналитическое решение, с помощью которого исследуется влияние параметров математической модели и моделируемого объекта на процесс конвективной диффузии. Целью работы являлся анализ влияния различных параметров математической модели на результаты расчетов, также исследовано влияние дисперсности частиц на процесс диффузии в продольном и поперечном направлениях.

1. Математическая модель. Уравнение трехмерной нестационарной диффузии (1) имеет вид [16]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \frac{q}{H} \quad (1)$$

Здесь $C(t, x, y, z)$ – концентрация; q – расход массы; u, v, w – пространственные составляющие скорости потока в пространственных направлениях; D_x, D_y, D_z – коэффициенты диффузии для соответствующих пространственных направлений. Водоток предполагается прямолинейным, постоянной глубины H , со средней (по расходу) продольной скоростью $U = \text{const}$, поперечная и вертикальная осредненные скорости водотока считаются равными нулю. Ось Ox направлена вдоль берега в сторону течения, ось Oy – поперек потока, ось Oz – вертикально вверх. Рассматривается малоинерционная примесь, у которой $u=U, v=0, w=W$, где W – скорость установившегося осаждения частиц. В предположении установившегося характера процесса – отсутствия зависимости концентрации от времени, а также в предположении отсутствия диффузии в продольном и вертикальном направлениях уравнение диффузии будет иметь вид [16]:

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) - \frac{q}{H} \quad (2)$$

Если пренебречь турбулентными пульсациями вертикальной составляющей скорости, то тогда расход осаждения k -й фракции многофракционной примеси можно рассчитать по формуле [16]:

$$q_k = (C_k - C_b) \cdot W_k \quad (3)$$

Распределение средних значений концентрации k -ой фракции примеси на вертикали $C_k(x, y)$ при указанных условиях описывается дифференциальным уравнением в частных производных:

$$U \frac{\partial C_k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C_k}{\partial y} \right) - \frac{(C_k - C_b) \cdot W_k}{H} \quad (4)$$

Источников загрязнения вдоль береговой линии не наблюдается, поэтому принимаются следующие граничные условия (5):

$$C_k(0, y) = f_k(y); \left. \frac{\partial C_k}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \left. \frac{\partial C_k}{\partial y} \right|_{y=L} = 0 \quad (5)$$

Здесь C_k, C_b, q_k, f_k, L – концентрация k -ой фракции, фоновая концентрация, расход осаждения k -ой фракции примеси, функция распределения k -ой фракции в начале канала, ширина канала. В случае если фоновая концентрация равна нулю, то уравнение (4) при всех прочих допущениях может иметь вид:

$$U \frac{\partial C_k}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C_k}{\partial y^2} - C_k \frac{W_k}{H} \quad (6)$$

Предполагалось, что функция начального распределения также удовлетворяет уравнению (6) и при $x=0$:

$$\frac{d^2 f_k}{dy^2} = f_k \frac{W_k}{HD} \quad (7)$$

Решение уравнения (7) имеет вид:

$$f_k(y) = e^{-y \sqrt{\frac{D}{W_k}}} \quad (8)$$

Начальное распределение возможно описать следующей функцией, где f_{k0} – концентрация k -ой фракции в источнике:

$$f_k(y) = \begin{cases} f_{k0} e^{-(y-y_s)}, & y \geq y_s \\ f_{k0} e^{(y-y_s)}, & y < y_s \end{cases} \quad (9)$$

Направление вертикального движения взвеси обуславливается скоростью оседания данной взвеси. На характер осаждения частиц взвеси оказывают влияние их размер и форма, режим движения воды и её вязкость, зависящая от температуры и содержания солей. В данной работе расчёт скорости осаждения был произведен по двум различным формулам, приведенным в статье [20] и работе [13]. Первая формула (10) используется для расчета скорости седиментации шарообразных частиц при ламинарном режиме обтекания:

$$W = \frac{g \cdot d^2}{18 \cdot \nu} \cdot \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right), \quad (10)$$

где g – ускорение свободного падения, ρ_s – плотность частицы, ρ – плотность жидкости, d – диаметр частиц, ν – кинематическая вязкость воды. Отличие формулы (11) от формулы (10) заключается в отсутствии учета вязкости и наличии учета коэффициента сопротивления:

$$W = \sqrt{\frac{4gD\rho_s}{3C_R\rho}}, \quad (11)$$

где C_R — коэффициент сопротивления (для шарообразной частицы $C_R \approx 0.45$). По методике разработки допустимых сбросов загрязняющих веществ в водные объекты для водопользователей [13, 21] коэффициент турбулентной диффузии рассчитывается по формуле:

$$D = \frac{gUH}{31n_r C_c^2} \quad (12)$$

где g – ускорение свободного падения, м/с; U – скорость течения реки, м/с; H – глубина реки, м; n_r – коэффициент шероховатости ложа реки, определяемый по справочным данным [21], C_c – коэффициент Шези ($m^{0.5}/c$), определяемый по формуле:

$$C_c = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n_r} - \frac{\sqrt{g}}{0.13} (1 - \log R) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n_r} - \sqrt{\frac{g}{0.13} \left(\frac{1}{n_r} + \sqrt{g \log R} \right)} \right)^2} \right] \quad (13)$$

где R – гидравлический радиус потока, $R \approx H$. В статье [4] для расчета коэффициента диффузии применяется формула (14):

$$D = 0.15 \frac{UH\sqrt{g}}{C_c} \quad (14)$$

Формула коэффициента диффузии (15) (здесь L – ширина реки), учитывающая извилистость реки, большую ширину русла, выведенная с учетом эмпирических констант [14] на основе формул из статьи [16], имеет вид:

$$D = 3.65 \cdot 10^{-3} UH \sqrt{\frac{L}{H}} \quad (15)$$

Формула коэффициента турбулентной диффузии [13, 14], учитывающая параметр M , зависящий от величины коэффициента Шези, записывается как

$$D = \frac{gHU}{MC_c} \quad (16)$$

При условии $10 < C_c < 60$ параметр $M = 0.7C_c + 6$, при $C_c \geq 60$ коэффициент $M = 48 = \text{const}$.

Если предположить, что $C_k(x, y) = C_k(x, y)e^{\frac{W_k}{UH}x}$ то неоднородное уравнение (6) преобразуется к однородному уравнению (6*):

$$\frac{\partial C_k}{\partial x} = \frac{D}{U} \frac{\partial^2 C_k}{\partial y^2} \quad (6^*)$$

Рассмотрим метод разделения переменных [1] решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа применительно к уравнению (6*). Предположим, что $C_k(x, y) = X(x)Y(y)$. В таком случае уравнение (6**) будет иметь вид:

$$X'_k(x)Y_k(y) = \frac{D}{U} X_k(x)Y_k''(y) \quad (6^{**})$$

Перепишем уравнение (6**) в виде уравнения (6***); уравнение (17) в виде (17*) и (17**):

$$\frac{X'(x)}{\frac{D}{U} X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2 \quad (6^{***})$$

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{D}{U} \lambda^2 X, X = e^{-\frac{D}{U} \lambda^2 x} \quad (17)$$

$$\frac{d^2 Y_k}{dy^2} = -\lambda^2 Y_k \quad (17^*)$$

$$Y_k(y) = A_k \cos \lambda y + B_k \sin \lambda y \quad (17^{**})$$

В связи с граничными условиями (5) имеем:

$$Y'(0) = Y'(L) = 0 \quad (5^*)$$

Из граничных условий получаем следующее выражение для функции $Y(y)$:

$$Y_k(y) = A_{ik} \cos \lambda_i y, \lambda_i = \frac{\pi i}{L}, i = 1, 2 \dots n \quad (18)$$

$$Y_k(y) = \sum_i A_{ik} \cos \lambda_i y \quad (18^*)$$

Таким образом, решение уравнения (6) имеет вид (19)

$$C_k(x, y) = e^{-\frac{W_k}{UH}x} \left(\sum_i A_{ik} \cos \lambda_i y e^{-\frac{D}{U} \lambda_i^2 x} \right) \quad (19)$$

Коэффициенты A_{ik} определяются следующим образом:

$$A_{ik} = \frac{2}{L} \int_0^L f_k(y) \cos \lambda_i y dy, \quad (20)$$

где для каждой фракции дисперсной примеси функции f_k определяются уравнениями (9). Математическая модель (18)-(20) реализована в виде компьютерной программы на языке программирования Fortran. Расчеты концентраций дисперсной взвеси одновременно прово-

дились для коэффициентов (10)-(16) и различных дисперсностей частиц. Программа включала в себя блок ввода физических параметров жидкости и частиц, геометрических параметров моделируемого водотока, основную программу, реализующую математическую модель, а также блок вывода результатов расчетов.

2. Результаты расчетов. По приведенным формулам был проведен расчет коэффициента турбулентной диффузии при следующих значениях параметров: $g=9.8 \text{ м/с}^2$, $n_r=0.033$, $U=0.41$, $H=20$ начальная концентрация в источнике $f_{k0}=20 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$, $k=1, \dots, 6$. Плотности несущей среды и дисперсной примеси соответственно $\rho=1000 \text{ кг/м}^3$, $\rho_s=2500 \text{ кг/м}^3$. На рис. 1 представлена общая схема течения.

На рис. 2 изображено начальное распределение концентрации одной из фракций частиц, предполагалось, что начальное распределение концентрации для всех фракций одинаково

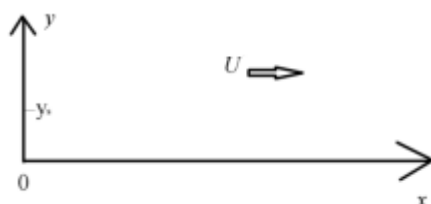


Рис. 1. Схематическое изображение течения.

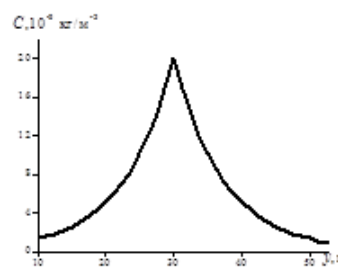


Рис. 2. Начальное распределение концентрации.

Рассмотрим сходимость ряда Фурье для нескольких частных сумм ряда — $N=4, 8, 16, 32, 64$. На рис. 3а и рис. 3б представлены пространственные распределения концентрации (вдоль осей x и y пространственных направлений) для различных частных сумм рядов из фундаментальных функций. При увеличении количества слагаемых в частных суммах ряда Фурье уменьшается отличие между значениями предыдущего и последующего решений, как для продольного, так и для поперечного сечений.

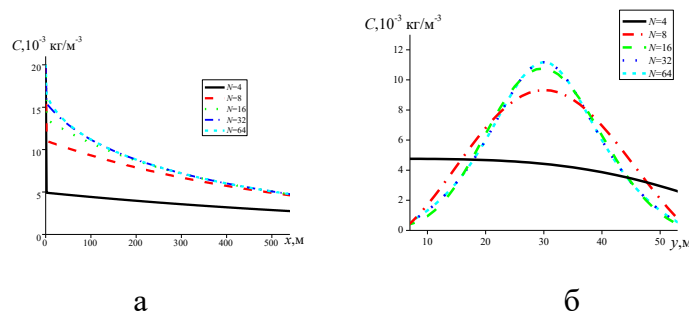


Рис. 3. а) Сходимость в продольном направлении, б) сходимость в поперечном направлении

Выбор формулы для коэффициента турбулентной диффузии оказывает существенное влияние на результаты расчетов диффузии твердой примеси (рис. 4).

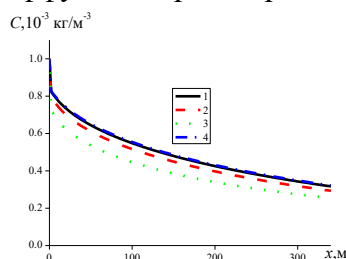


Рис. 4. Продольное распределение концентрации для различных видов расчета коэффициента турбулентной диффузии

Решения, полученные для формул коэффициента турбулентной диффузии (12) и (16) близки, меньшая величина концентрации в продольном направлении наблюдается при выборе для расчета коэффициента турбулентной диффузии формулы (14); наименьшее значение наблюдается при выборе коэффициента турбулентной диффузии по формуле (15). Влияние на результаты расчетов диффузии твердой примеси оказывает и выбор формулы расчета скорости осаждения частиц – рис. 4. При выборе формулы осаждения (10) скорость осаждения существенно превышает скорость осаждения, полученную по формуле (11). В отличие от мелкодисперсных фракций различия в скоростях осаждения частиц имеют существенное значения для крупнодисперсных фракций – (рис.5а-5в).

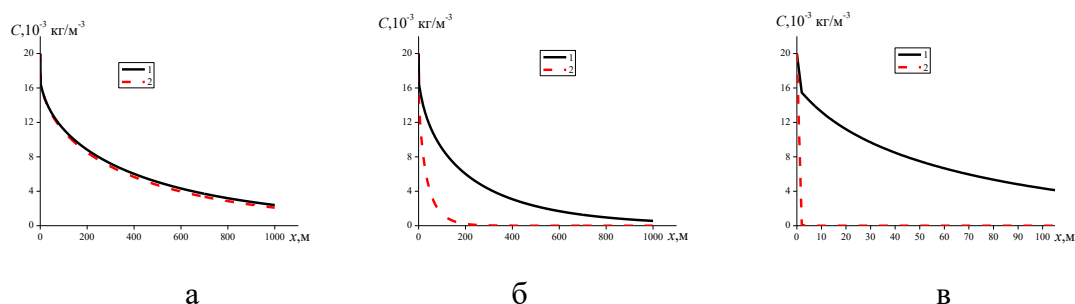


Рис. 5. Сопоставление концентрации при различных способах вычисления скоростей осаждения частиц: а) диаметр частиц $d= 0.1$ мм, б) диаметр частиц $d= 0.4$ мм, в) диаметр частиц $d= 4$ мм.

Сопоставление решений, полученных для моделей учитывающих и не учитывающих осаждение частиц (рис. 6), демонстрирует, что учет осаждения частиц более существенно влияет на результаты моделирования диффузии крупнодисперсной фракции.

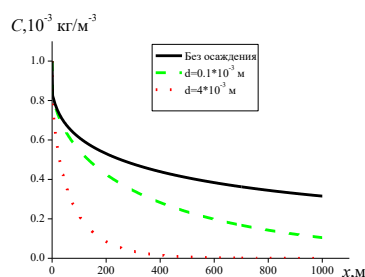


Рис. 6. Продольное распределение концентрации примеси в моделях с учетом седиментации частиц и без учета, фракция частиц с дисперсностью $d=0.1$ мм.

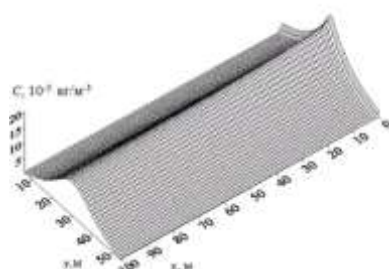


Рис. 7. Пространственное распределение концентрации частиц

При начальном распределении концентрации в виде точечного источника–рис.2 в процессе распространения примеси вдоль проточного водоема происходит постепенное сглаживание поперечного профиля концентрации частиц (рис. 7). Из-за влияния размера частиц на скорость их осаждения концентрации мелко и крупнодисперсных фракций имеют существенные отличия, как в продольном (рис.8а), так и в поперечном направлениях (рис.8б). За

счет отсутствия в математической модели скорости движения среды в y -направлении, концентрация примеси убывает в продольном направлении интенсивнее.

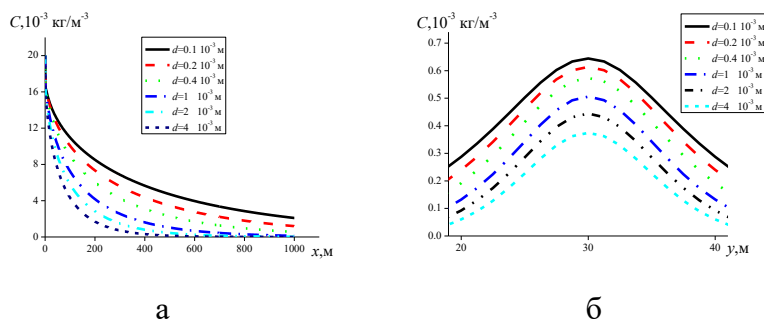


Рис. 8. а) Продольное распределение концентрации примеси для различных дисперсностей частиц, б) распределение концентрации различных фракций примеси вдоль координаты y , $x=50$ м

Выводы. В работе представлена двухмерная стационарная математическая модель диффузии многофракционной твердой примеси в движущемся потоке. Для совокупности уравнений математической модели диффузии фракций примеси, дополненных граничными условиями, методом разделения переменных получено решение в виде ряда Фурье, реализованное в рамках компьютерной программы. Исследовано влияние различных параметров математической модели диффузии твердой дисперсной примеси в движущемся потоке на результаты расчетов. Сопоставлены результаты расчетов с различными формулами скорости осаждения частиц, определено, что для крупнодисперсных частиц выбор формулы скорости седиментации имеет большее влияние на результаты расчетов распространения примеси в водотоке. Проведены расчеты диффузии для различных коэффициентов турбулентной диффузии, результаты расчетов сопоставлены, как и расчеты диффузии для математических моделей с учетом и без учета осаждения частиц. Определено влияние учета осаждения частиц для фракций примеси с разными размерами частиц. Проведены расчеты распределения концентраций фракций примеси с различными размерами частиц, выявлено влияние размера частиц на распространение фракций примеси. Выявленные в работе закономерности возможно использовать при оптимизации математических моделей экологической безопасности гидротехнических работ на водотоках.

Благодарности. Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

Список источников

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Издательство «Наука», 1977. – 736 с.
2. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах / А.Г. Кутушев. – СПб: Недра, 2003. – 284 с.
3. Мухаметзанов И.Т. Осаждение мелкодисперсных пылевых частиц в дыхательном тракте с использованием средств индивидуальной защиты / И.Т. Мухаметзанов, Ш.Х. Зарипов, Л.М. Фатхутдинова [и др.] // Медицина труда и промышленная экология, 2017. – № 7. – С. 56-60.
4. Тукмаков А.Л. Распределение твердых частиц в акустическом поле резонансной трубы при различных режимах возбуждения колебаний / А.Л. Тукмаков // Теплофизика и аэромеханика, 2005. – № 2. – С. 219-227.
5. Тукмаков А.Л. Динамика заряженной газовой взвеси с начальным пространственно неравномерным распределением средней плотности дисперсной фазы при переходе к равновесному состоянию / А.Л. Тукмаков, Д.А. Тукмаков // Теплофизика высоких температур, 2017. – №4. – С. 509-512.

6. Тукмаков Д.А. Математическая модель нестационарной сорбции в двухфазной среде, учитывающая пространственную неравномерность распределения концентрации микрокомпонента в фазе сорбента / Д.А. Тукмаков // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Химия, 2019. – № 4. – С. 24–35.
7. Тукмаков Д.А. Численная модель течения аэрозоля, обусловленного взаимодействием частиц и газа/ Д.А. Тукмаков // Сложные системы, 2021. – №1. – С. 64–71.
8. Чернышев И.А. Численное моделирование системы гидродинамического удаления льда из докового комплекса / И.А. Чернышев, А.Л. Сухоруков // Информационные и математические технологии в науке и управлении, 2018. – № 2. – С. 136–145.
9. Podgorni K.A. Leonov A.V. Modeling of suspended matter distribution in marine coastal areas: 2. Testing and practical applying of sm-model // Океанологические исследования, 2017. – № 1. – С.142–162
10. Jiaqi Y., Limo T., Yuntong S., Jiao S. Laboratory measurements of the fall velocity of fine sediment in an estuarine environment. International Journal of Sediment Research, 2020, Issue 2, pp. 217–226.
11. Рахуба А.В., Моделирование распределения мутности воды в Куйбышевском водохранилище / А.В. Рахуба, М.В. Шмакова // Вестник Московского университета» Серия 5: географическая, 2020. – № 4. – С.51–57
12. Jimenez J.A., Madsen O.S. Simple Formula to Estimate Settling Velocity of Natural Sediments// Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng, 2003, pp.70–78.
13. Аллагулова Е.Э. Расчет концентрации речной взвеси от дноуглубительных работ: выпускная квалификационная работа / Е.Э. Аллагулова. – Казань, 2021. – 67 с.
14. Волинов М.А. Влияние плановой геометрии речного русла на диффузию и дисперсию примеси / М.А. Волинов // Фундаментальные исследования, 2013. – № 6. – С. 535–540
15. Белокопытов В.Н. Моделирование распространения загрязняющей примеси в Севастопольской бухте / В.Н. Белокопытов, А.И. Кубряков, С.Ф. Пряхина // Морской гидрофизический журнал, 2019. – № 1. – С.5–15.
16. Наумов В.А. Математическое моделирование распространения взвешенных примесей от точечного источника и их осаждения в водотоке / Наумов В.А. // Известия КГТУ, 2017. – № 44. – С.46–58.
17. Котеров В.Н. Моделирование переноса взвешенных веществ на океаническом шельфе. Горизонтальное рассеяние/ В.Н. Котеров, Ю.С. Юрезанская // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2010. – № 2. – С. 375–387.
18. Мухаметзянова А. Г. Моделирование объемов и площадей зон загрязненных взвесью в водной среде / Мухаметзянова А. Г., К.А. Алексеев, Н.Н. Закиров // Вестник Казанского технологического университета, 2014. – №21. – С.361–364.
19. Цыденов Б.О. Численное исследование распространения примеси в пресном озере на основе распределения мутности воды / Б.О. Цыденов // Вычислительные технологии, 2017. – № 1. – С.113–124
20. Студёнов И.И., Шилова Н.А. Расчет гидравлической крупности взвеси при моделировании динамики концентрации взвешенных веществ в приустьевых районах арктических морей на примере Белого моря / И.И. Студёнов, Н.А. Шилова // Научные исследования в Арктике, 2015. – №3. – С.40–47
21. Порядок проведения расчета условных фоновых концентраций химических веществ в воде водных объектов для установления нормативов допустимых сбросов сточных вод. – URL: <http://www.pfo.meteorf.ru/assets/files/56/52.24.622-2019.pdf> (дата обращения 10.12.2021)
22. Караушев А.В. Методические основы оценки антропогенного влияния на качество поверхностных вод / А.В. Караушев. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1981. – 176 с

Тукмаков Дмитрий Алексеевич, 1980-го года рождения, образование: специалист-математик, к.ф.-м.н., научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр Казанский научный центр РАН, AuthorID:739648, SPIN-код:3556-8576, ORCID:0000-0002-0335-8548, tukmakovda@imm.knc.ru 420111, Россия, г. Казань, ул. Лобачевского.

UDC 502.2,57.013,51-7

DOI:10.38028/ESI.2022.26.2.003

Investigation of the influence of the parameters of the mathematical model of two-dimensional stationary convective diffusion on the calculations of the concentration of depositing solid particles in the channel

Dmitry A. Tukmakov

Abstract. The paper investigates the influence of various parameters of the mathematical model of diffusion on the results of calculations of the convective diffusion of a dispersed impurity in a liquid. The need to study and model the diffusion processes of dispersed impurities is associated with the environmental problems of deepening the riverbed. Natural conditions in fishery reservoirs are adversely affected as a result of hydraulic engineering works. The extraction of sand and gravel mixtures in riverbeds leads to pollution of watercourses with suspended solids and, accordingly, to an increase in turbidity, which has a negative impact on aquatic ecosystems. This paper presents the results of a theoretical study of the diffusion of a solid impurity and evaluates the influence of both different approaches in modeling and the parameters of disperse media. The equations of the mathematical model are derived from the equation of convective diffusion in a two-dimensional non-stationary form. The watercourse is assumed to be rectilinear, of constant depth, with a constant average longitudinal velocity, while the transverse and vertical averaged velocities of the watercourse are assumed to be equal to zero. Let us direct the Ox axis along the coast towards the current, the Oz axis vertically upwards, and the Oy axis transverse to the flow. It is assumed that the point source maintains its intensity long enough to be able to solve the problem in the stationary approximation. After applying simplifications, a flat mathematical model of stationary diffusion is obtained. By the method of separation of variables in the form of a Fourier series, a solution was obtained for the set of equations of the mathematical model of diffusion of several fractions of particles. The solution is implemented in the form of a computer program. The influence of various model parameters (particle settling rate, accounting for particle sedimentation, and the linear size of particles of a dispersed impurity) on the results of calculations of the diffusion of a dispersed impurity in the longitudinal and transverse directions was determined using the method.

Keywords: mathematical modeling, diffusion, inhomogeneous media, dispersed suspension

Acknowledgements: The work was carried out within the framework of the state task of the Federal Research Center of the Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

References

1. Tihonov A.N., Samarskiy A.A. *Urnveniya matematicheskoy fiziki*. [Equations of mathematical physics]. Moskva: Izdatel'stvo «Nauka». 1977, 736 p.
2. Kutushev A.G. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh processov v aerodispersnykh i poroshkoobraznykh sredah*. [Mathematical modeling of wave processes in aerodisperse and powder media]. SPb, Nedra, 2003, 284 p.
3. Muhametzanov I.T., Zaripov SH.H., Fathutdinova L.M., Grinshpun S.A. *Osazhdenie melkodispersnykh pylevykh chastic v dyhatel'nom trakte s ispol'zovaniem sredstv individual'noj zashchity* [Deposition of fine dust particles in the respiratory tract using personal protective equipment]. *Medicina truda i promyshlennaya ekologiya* [Occupational Health and Industrial Ecology]. 2017, no 7, pp. 56-60.
4. Tukmakov A.L. *Raspredelenie tverdykh chastic v akusticheskom pole rezonansnoj trubyy pri razlichnykh rezhimakh vzbuzhdeniya kolebanij* [Distribution of Solid Particles in the Acoustic Field of a Resonant Tube under Different Modes of Oscillation Excitation]. *Teplofizika i aeromekhanika* [Thermophysics and Aeromechanics]. 2005, no. 2, pp.219-227.
5. Tukmakov A.L., Tukmakov D.A. *Dynamics of a charged gas suspension with an initial spatially nonuniform distribution of the average dispersed phase density during the transition to the equilibrium state*. *Teplofizika vysokikh temperatur* [Thermophysics of high temperatures]. 2017, no 4, pp. 491-495.
6. Tukmakov D.A. *Matematicheskaya model' nestacionarnoy sorbcii v dvufaznoj srede, uchityvayushchaya prostanstvennuyu neravnomernost' raspredeleniya koncentracii mikrokomponenta v faze sorbenta* [Mathematical model of non-stationary sorption in a two-phase medium, taking into account the spatial unevenness of the distribution of the concentration of the microcomponent in the sorbent phase]. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Himiya* [Bulletin of the Tver State University. Series: Chemistry]. 2019, no 4, pp.24-35.
7. Tukmakov D.A. *Numerical model of aerosol flow due to particle-gas interaction*. // *Slozhnyye sistemy* [Complex systems]. 2021, no.1, pp. 65-71.
8. Chernyshev I.A., Sukhorukov A.L. *Chislennoye modelirovaniye sistemy gidrodi-namicheskogo udaleniya l'da iz dokovogo kompleksa* [Numerical modeling of the hydrodynamic ice removal system from the dock complex]// *Informatsionnyye i matematicheskiye tekhnologii v nauke i upravlenii* [Information and Mathematical Technologies in Science and Management]. 2018, no. 2, pp. 136-145.

9. Podgornyi K.A., Leonov A.V. Modeling of suspended matter distribution in marine coastal areas: 2. Testing and practical applying of sm-model. *Okeanologicheskie issledovaniya* [Oceanological Research]. 2017, no 1, pp. 142–162. (In Russian)
10. Yang Jiaqi, Tang Limo, She Yuntong, Sun Jiao Laboratory measurements of the fall velocity of fine sediment in an estuarine environment. *International Journal of Sediment Research*. 2020, no 2, pp. 217–226.
11. Rahuba A.V., Shmakova M.V. Modelirovanie raspredeleniya mutnosti vody v Kujbyshevskom vodohranilishche [Modeling the distribution of water turbidity in the Kuibyshev reservoir] // *Vestnik Moskovskogo universiteta, Seriya 5: geograficheskaya* [Bulletin of Moscow University, Series 5: geographical]. 2020, no 4, pp. 51–57. (In Russian)
12. Jimenez J.A., Madsen O.S. Simple Formula to Estimate Settling Velocity of Natural Sediments. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, 2003, pp. 70–78.
13. Allagulova E.E. Raschet kontsentratsii rechnoy vzvesi ot dnouglubitel'nykh rabot [Calculation of the concentration of river suspension from dredging]. Final qualifying work. Kazan, 2021, 67 p.
14. Volynov M. A. Vliyanie planovoy geometrii rechnogo rusla na diffuziyu i dispersiyu primesi [Influence of the planned geometry of the river channel on the diffusion and dispersion of impurities] // *Fundamental'nye issledovaniya* [Fundamental research]. 2013, no 6, pp. 535–540.
15. Belokopytov V.N., Kubryakov A.I., Pryahina S.F. Modelirovanie rasprostraneniya zagryaznyayushchej primesi v Sevastopol'skoj buhte [Modeling the spread of contaminants in the Sevastopol Bay]. *Morskoy gidrofizicheskij zhurnal* [Marine Hydrophysical Journal]. 2019, no 1, pp. 5–15.
15. Naumov V. A. Matematicheskoe modelirovanie rasprostraneniya vzveshennykh primesej ot tochechnogo istochnika i ih osazhdeniya v vodotoke [Mathematical modeling of the distribution of suspended impurities from a point source and their deposition in a watercourse]. *Izvestiya KGTU* [Izvestiya KSTU]. 2017, no 44, pp. 46–58. (In Russian)
16. Koterov V. N., Yurezanskaya Y.S. Modelirovanie perenosa vzveshennykh veshchestv na okeanicheskom shel'fe. Gorizonta'noe rasseyanie [Modeling of the transport of suspended matter on the oceanic shelf. Horizontal scattering] *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2010, no 2, pp. 375–387.
17. A. G. Muhametzyanova, K. A. Alekseev, N. N. Zakirov Modelirovanie ob'emov i ploshchadej zon zagryaznennykh vzves'yu v vodnoj srede [Calculation of suspension hydraulic fineness in modeling the dynamics of suspended matter concentration in the mouth areas of the Arctic seas on the example of the White Sea]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta* [Bulletin of the Kazan Technological University]. 2014, no 21, pp. 361–364. (In Russian)
18. Cydenov B.O. Chislennoe issledovanie rasprostraneniya primesi v presnom ozere na osnove raspredeleniya mutnosti vody [Numerical study of the spread of impurities in a fresh lake based on the distribution of water turbidity]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational technologies]. 2017, no 1, pp. 113–124.
19. Studyonov, I.I. Raschet gidravlicheskoj krupnosti vzvesi pri modelirovanii dinamiki koncentracii vzveshennykh veshchestv v priust'evykh rajonah arkticheskikh morej na primere Belogo moray [Calculation of suspension hydraulic fineness in modeling the dynamics of suspended matter concentration in the mouth areas of the Arctic seas on the example of the White Sea]. *Nauchnye issledovaniya v Arktike* [Scientific research in the Arctic]. 2015, no 3, pp. 40–47
20. Poryadok provedeniya rascheta uslovykh fonovykh koncentracij himicheskikh veshchestv v vode vodnykh obektov dlya ustanovleniya normativov dopustimyh sbrosov stochnykh vod [The procedure for calculating the conditional background concentrations of chemicals in the water of water bodies to establish the standards for permissible wastewater discharges] Available at: <http://www.pfo.meteorf.ru/assets/files/56/52.24.622-2019.pdf>. 10.12.2021.
21. Karaushev A.V. Metodicheskie osnovy ocenki antropogennogo vliyaniya na kachestvo poverhnostnykh vod: monografiya [Methodological bases for assessing the anthropogenic influence on the quality of surface waters]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1981, 176 p.

Dmitry A. Tukmakov, born in 1980, education: specialist mathematician, candidate of physical and mathematical sciences, researcher, Federal Research Center Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, AutorID:739648, SPIN-код:3556-8576, ORCID:0000-0002-0335-8548, tukmakovda@imm.knc.ru, 420111, Russia, Kazan, st. Lobachevsky, 2/31.

Статья поступила в редакцию 20.04.2022; одобрена после рецензирования 10.06.2022; принята к публикации 14.06.2022.

The article was submitted 04/20/2022; approved after reviewing 06/10/2022; accepted for publication 06/14/2022.