

УДК 62-752, 621:534, 629.04.15, 519.71

## РЫЧАЖНЫЕ СВЯЗИ: ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРНЫХ ИНТЕРПРЕТАЦИЙ

**Елисеев Сергей Викторович**

д.т.н., профессор, советник при ректорате по научной работе,  
e-mail: [eliseev\\_s@inbox.ru](mailto:eliseev_s@inbox.ru)

**Каргапольцев Сергей Константинович**

д.т.н., профессор кафедры «Автоматизация производственных процессов»,  
e-mail: [kck@irgups.ru](mailto:kck@irgups.ru)

**Елисеев Андрей Владимирович**

к.т.н., доцент кафедры «Математика», e-mail: [eavsh@ya.ru](mailto:eavsh@ya.ru)  
Иркутский государственный университет путей сообщения,  
664074, г.Иркутск, ул. Чернышевского 15

**Аннотация.** Рассматриваются вопросы формирования методологического базиса системного анализа механических колебательных структур, отображающих свойства транспортных и технологических объектов в условиях вибрационных динамических нагружений. Цель исследования заключается в разработке метода анализа и динамического синтеза в задачах динамики механических колебательных систем, ориентированных на детализацию представлений о формировании обобщенных связей между параметрами системы и оценки особенностей возникающих рычажных соотношений. Используются методы общей теории систем, в частности, аналитический аппарат теории автоматического управления. Показано, что введение передаточных функций межпарциальных связей позволяет построить новые подходы в оценке и использовании специфических свойств механических колебательных систем. Предлагается методика, в рамках которой механическая колебательная система с линейными свойствами и сосредоточенными параметрами может интерпретироваться как эквивалентная в динамическом отношении система автоматического управления. Передаточная функция системы строится на основе дифференциальных уравнений движения, получаемых в рамках формализма Лагранжа с последующим преобразованием Лапласа, что создает удобную платформу для оценки динамических свойств системы. Показано, что передаточная функция без специальных связей при обнулении частоты внешнего возмущения отображает свойства виртуального рычага в условиях статического нагружения. Введен и рассмотрен ряд новых понятий о проявлениях рычажных свойств механических колебательных систем при фиксированных частотах внешних гармонических синфазных возмущений. Предлагаемый метод иллюстрируется на ряде примеров.

**Ключевые слова:** механическая колебательная система, структурная схема, передаточная функция, рычажные связи, передаточные отношения, виртуальные рычаги.

**Цитирование:** Елисеев С.В., Каргапольцев С.К., Елисеев А. В. Рычажные связи: особенности структурных интерпретаций. //Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2021. № 1 (21). С. 05-16. DOI:10.38028/ESI.2021.21.1.001

**Введение.** Вопросы динамики технических объектов относятся к числу актуальных в решении задач, связанных с обеспечением надежности и безопасности эксплуатации технических средств, повышения динамического качества и конкурентоспособности технологических и транспортных машин [1].

Многие технические объекты транспортного и технологического назначения работают в условиях интенсивного вибрационного динамического нагружения, что инициирует поиски и разработки способов и средств оценки, контроля, коррекции, формирования и управления динамическими состояниями рабочих органов [2, 3].

Развитие научно-методологического базиса в решении задач динамики машин тесно связано с теорией колебаний механических систем, теорией управления и аналитическим аппаратом общей теории систем [4, 5], что инициирует внимание к вопросам формирования в системах динамических связей и способам их реализации, специфическим особенностям

динамических режимов различной природы. К числу таких режимов могут быть отнесены проявления особенностей реализации обратных связей в колебательных структурах, режимы динамического гашения, эффекты совместного одновременного действия нескольких воздействий, формы совместного движения элементов систем по нескольким координатам и др. [6].

Специфика решения задач динамики технических объектов во многом предопределяется особенностями механических колебательных систем, используемых в качестве расчетных схем, учетом многообразия составляющих элементов и их конструктивно-техническими формами реализаций.

В структурах механических колебательных систем широко применяются различного рода механизмы и устройства для преобразования движения и различные структурные образования элементов, обладающие приведенными массами, упругими свойствами и возможностями диссипации энергии [7, 8].

Введение в структуру механических колебательных систем различного рода механизмов, устройств для преобразования движения и структурных образований приводит к формированию в механических системах дополнительных динамических связей, которые оказывают, во многих случаях, существенное влияние на спектр динамических свойств рассматриваемых технических объектов.

Учёт динамических особенностей исходных объектов, обладающих определенным набором динамических связей, требует разработки специфических методов и средств построения математических моделей, детализации представлений о влиянии дополнительных связей и проявлениях их специфических динамических режимов.

В этом плане интерес для развития представлений об обобщенных связях, учете их особенностей имеют часто встречающиеся в конструктивно-технических решениях рычажные связи, проявление которых в различных формах характерно для транспортных и технологических машин.

В предлагаемой статье развиваются методологические позиции в оценке возможностей рычажных связей, проявления которых характерны для механических колебательных систем различной структуры.

**I. Некоторые общие положения.** 1. Рычаги, рычажные связи, рычажные механизмы известны с давних времен, что нашло соответствующее отражение в многочисленных научных работах по физике, механике, теории механизмов и машин и др. Простейший рычаг или рычажный механизм представляет собой твердое тело (часто в виде жёсткого стержня), имеющего неподвижную точку опоры. В рычаге первого рода точка опоры расположена между конечными точками рычага (рис. 1а); в рычагах второго рода опорная точка совпадает с одной из конечных точек (рис. 1б).

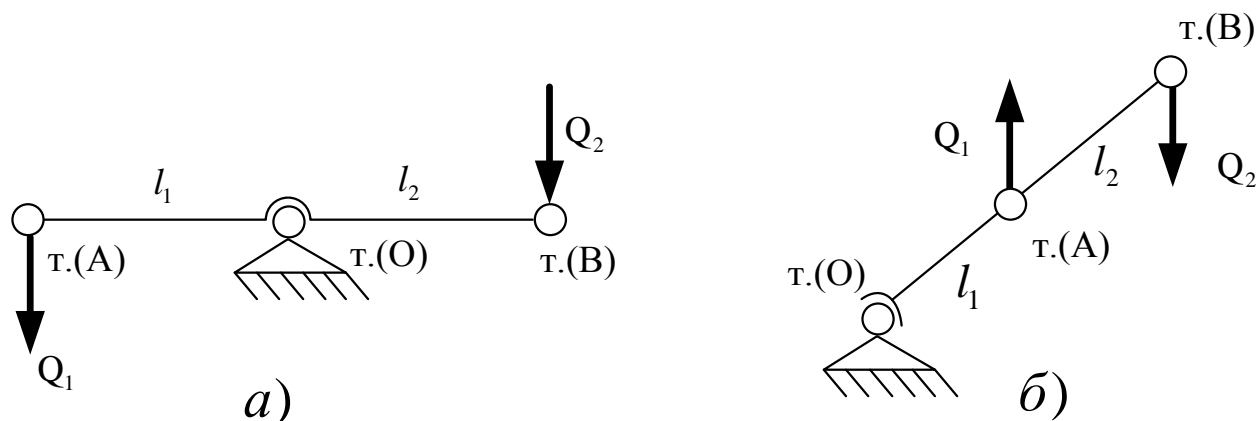
Для рычажного механизма, приведённого на рис. 1а,б характерны соотношения между усилиями и длинами плеч  $l_1, l_2$ :  $Q_1 l_1 = Q_2 l_2, Q_1 / Q_2 = l_2 / l_1$ .

В рычажных механизмах существуют также соотношения между перемещением по вертикали тт. (А),(В) относительно центра вращения (или неподвижной опоры т.(О)):

$$\frac{y_B}{y_A} = -\frac{l_2}{l_1} = i_1, \quad (1)$$

что следует из рис. 1а. В свою очередь,

$$\frac{y_B}{y_A} = \frac{l_1 + l_2}{l_1} = i_2. \quad (2)$$



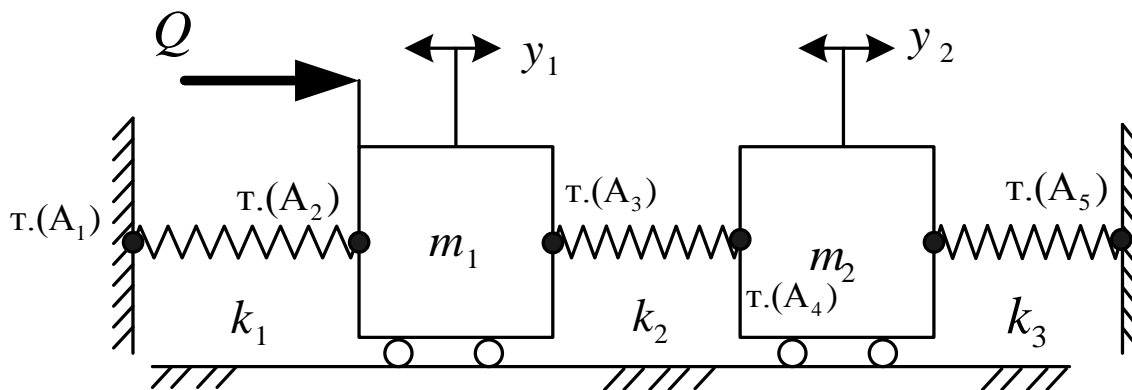
**Рис. 1.** Принципиальные схемы простейшего рычажного механизма: а) первого рода б) рычаг второго рода;  $l_1, l_2$  - длины плеч рычажного механизма.

Параметры рычажных механизмов  $i_1$  и  $i_2$  называются передаточными отношениями; эти понятия дают представления об опорных точках. Отметим, что такие опорные точки находятся на стержне (твердом теле) самого рычага; точка опоры может менять свое положение, что приводит к соответствующему изменению передаточных отношений  $i_1, i_2$ .

2. Рычажные механизмы, как уже упоминалось, широко используются в конкретных инженерно-технических разработках и реализуются различными механизмами, например, зубчатыми, винтовыми, кривошипно-ползунными и др. [9].

3. Передаточные отношения, связывающие перемещения отдельных точек, усилия в выбранных точках, отношения реакций связей взаимодействующих элементов механических структур часто используются в оценке динамических свойств транспортных и технологических объектов, что нашло отражение в работах [10, 11] и может рассматриваться, как основа формирования и развития детализированных представлений о формировании динамических связей на основе методов структурного математического моделирования [5].

**II. Математические модели динамических взаимодействий элементов в механических колебательных системах.** 1. Принципиальная схема механической системы, имеющей цепную структуру и состоящую из двух массо-инерционных звеньев с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных между собой упругими элементами с коэффициентами жесткости  $k_1, k_2, k_3$ , приводится на рис.2. Предполагается, что система обладает линейными свойствами и может совершать малые колебания относительно положения статического равновесия под действием моногармонической силы  $Q(t)$ , приложенной в т.(A<sub>2</sub>) (рис.2).



**Рис. 2.** Принципиальная схема механической колебательной системы цепного типа с двумя степенями свободы.

Движение системы описывается в системе координат  $y_1, y_2$ , связанных с неподвижным базисом. Используя известные подходы [5, 12] и опуская промежуточные выкладки, запишем систему уравнений движения в операторной форме

$$\bar{y}_1 m_1 p^2 + (k_1 + k_2) \bar{y}_1 - \bar{y}_2 k_2 = \bar{Q} \quad (3)$$

$$\bar{y}_1 m_1 p^2 + (k_1 + k_2) \bar{y}_1 - \bar{y}_2 k_2 = \bar{Q}, \quad (4)$$

где  $p = j\omega$  – комплексная переменная ( $j = \sqrt{-1}$ ); значок  $\bar{\phantom{x}}$  над переменной означает её изображение по Лапласу; интегральное преобразование Лапласа проведено при нулевых начальных условиях [13].

Математическая модель системы (3), (4) может быть интерпретирована как структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления. Соответствующая структурная схема приведена на рис. 3.

Передаточные функции исходной системы (рис.3) могут быть представлены [5] в виде:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{A(p)} \quad (5)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}} = \frac{k_2}{A(p)}, \quad (6)$$

где  $A(p) = (m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2$  (7)

является частотным характеристическим уравнением системы.

Из выражений (5)-(7) следует, в частности, что при действии гармонического возмущения  $Q$  система может находиться в двух резонансных режимах. Частоты собственных колебаний определяются из решения биквадратного уравнения (7).

В свою очередь, система обладает также режимом динамического гашения колебаний на частоте, определяемой выражением:

$$\omega_{dyn}^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2} \quad (8)$$

2. Связность движений по координатам  $y_1, y_2$  может быть оценена на основе использования передаточной функции межпарциальных связей:

$$W_{12}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{k_2}{k_2 + k_3} \quad (9)$$

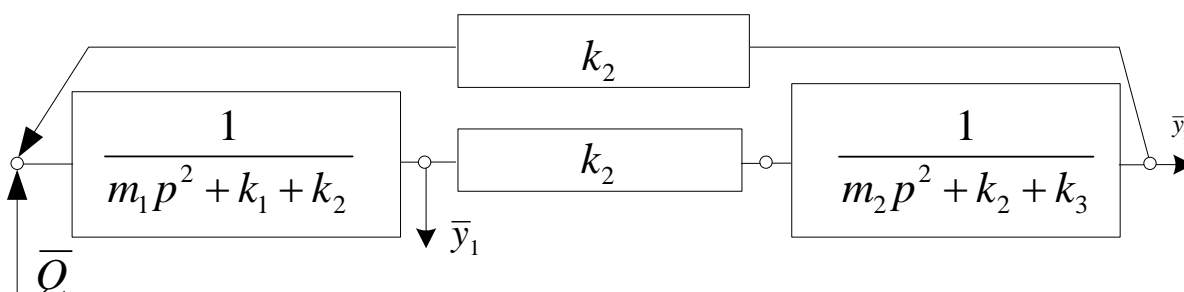


Рис. 3. Структурная схема (структурная математическая модель) системы на рис. 1.

Выражение (8) отображает особенности взаимных смещений точек по координатам  $y_1, y_2$  при действии гармонической силы, что характеризует особенности динамических процессов при периодическом возмущении.

При статическом воздействии по координате  $y_1$ , когда  $p=0$ , полагается, что возмущение становится статическим, найдём, что

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{k_2}{k_2 + k_3} = i_1, \quad (10)$$

где  $i_1$  можно рассматривать как передаточное отношение, характеризующее рычажные свойства системы при формировании связанности перемещений системы по координатам  $y_1, y_2$ .

С учётом вышеприведенного можно полагать, что механическая колебательная система, приведенная на рис.1 (или «механизм» с упруго-инерционными звеньями) может рассматриваться как некоторая форма рычажного механизма. Полагаем, что такой «механизм» мог бы получить название «виртуального» рычага. Частные аспекты предлагаемых подходов представлены в работе [14].

3. В рассматриваемом случае  $i_1 > 0$ , что позволяет «отнести» виртуальный рычаг к рычагам второго рода. Это предопределяет соответствующее расположение точки опоры виртуального рычага.

Если полагать, что расстояние между элементами  $m_1$  и  $m_2$  в статическом состоянии известно, например,  $l_0$ , то положение точки опоры можно найти из соотношения

$$\frac{k_2}{k_2 + k_3} = \frac{l_1}{l_1 + l_0}, \quad (10')$$

где  $l_1$  расстояние от элемента  $m_1$  до точки опоры виртуального рычага. Таким образом, точка опоры в рассматриваемом случае нагружения определяется выражением

$$l_1 = l_0 \frac{k_2}{k_3}. \quad (11)$$

Соотношение параметров, определяющих положение точки опоры, соответствует схеме на рис. 4, где т.(O) является точкой опоры виртуального рычага.

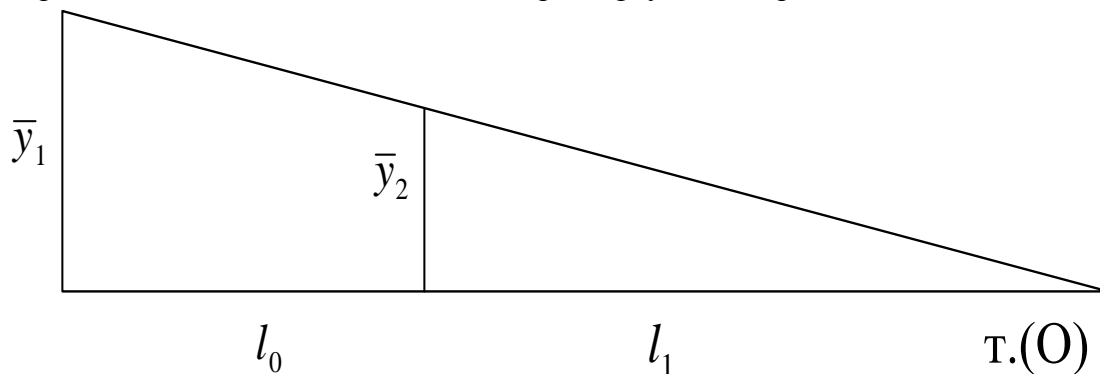


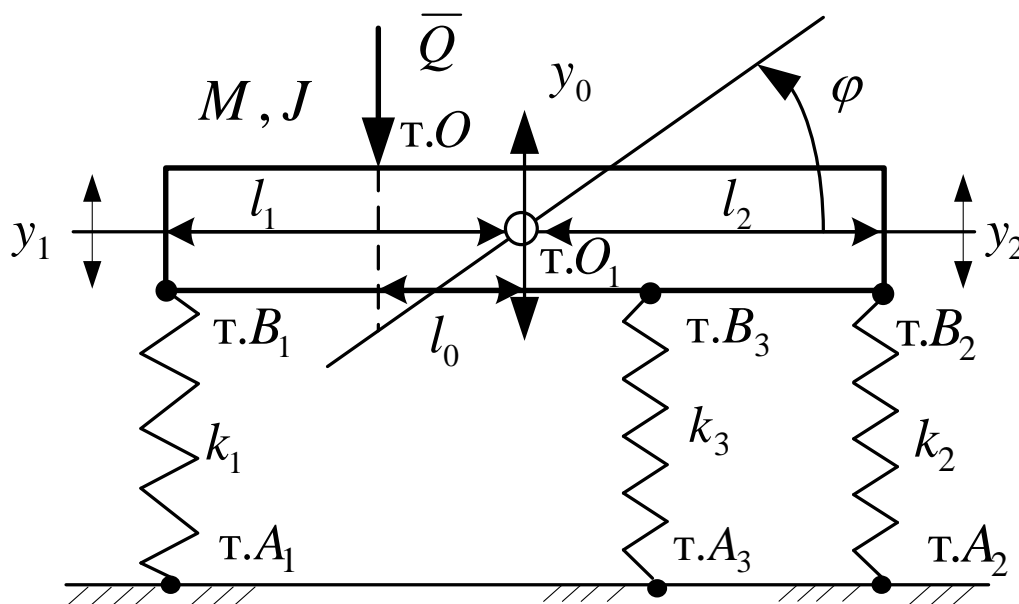
Рис. 4. Принципиальная схема для определения точки опоры виртуального рычага

Таким образом, распределение смещений по координатам  $y_1$  и  $y_2$  в статическом режиме в механической системе с массоинерционными и упругими элементами соответствует распределениям смещений  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$  в виртуальном рычаге первого рода. Отметим, что точки опоры рычага при динамических нагружениях трансформируются в «узлы вращений» или «узлы колебаний», что рассматривалось в работе [15].

Таким образом, механическая колебательная система с двумя степенями свободы в определенных ситуациях может находиться в ситуации, соответствующей представлению о движении некоторого твердого тела.

**III. Особенности математических моделей механических колебательных систем с твердым телом.** 1. Для транспортных объектов и технологических вибрационных машин часто используются расчетные схемы, в которых объект, динамические состояния которого оцениваются, имеет вид твердого тела, совершающего плоское колебательное движение.

Расчётная схема такого объекта представлена на рис. 5. Твёрдое тело с массой  $M$  и моментом инерции  $J$  опирается на упругие элементы с коэффициентами жесткости  $k_1, k_2, k_3$ . Внешнее возмущение приложено в т.( $O$ ) (рис. 5) твердого тела на расстоянии  $l_0$  от центра масс т.( $O_1$ ) (рис. 5).



**Рис. 5.** Расчетная схема технического средства с объектом в виде твердого тела, совершающего плоское движение.

Для составления уравнений движений, вызванных действием гармонической силы  $Q(t)$ , приложенной в т.( $O$ ), запишем выражение для кинетической и потенциальной энергии, используя системы координат  $y_1, y_2$ , а также  $y_0$  и  $\varphi$ . При расчетах используются следующие соотношения:

$$y_0 = ay_1 + by_2, \varphi = c(y_2 - y_1), y_1 = y_0 + l_1\varphi, y_2 = y_0 - l_3\varphi, \quad (12)$$

$$a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, c = \frac{1}{l_1 + l_2},$$

где  $l_1, l_2$  – расстояние до центра масс т.( $O_1$ ),  $l_0$  – плечо приложения внешнего возмущения  $Q$ ,  $l_3$  – положение т.( $B_2$ ), где закрепляется упругий элемент  $k_2$ ,  $y_3$  – не является независимой переменной и определяется через  $y_1, y_2$ .

Выражение для кинетической энергии системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}_0^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} M (ay_1 + by_2)^2 + \frac{1}{2} J c^2 (y_2 - y_1)^2 \quad (13)$$

Выражение для потенциальной энергии системы при силовых возмущениях  $Q$ , в свою очередь, определяется выражением:

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2 + \frac{1}{2} k_3 y_3^2 \quad (14)$$

При расчетах используются следующие соотношения:

$$y_3 = ay_1 + by_2 - l_3 c (y_2 - y_1) = a_1 y_1 + b_1 y_2, \text{ где } a_1 = a + l_3 c, b_1 = b - l_3 c. \quad (14')$$

В этом случае система уравнений движения в операторной форме в координатах  $\bar{y}_1$ ,  $\bar{y}_2$  по аналогии с вышеприведенными выкладками для цепной системы по рис. 1, примет вид:

$$\bar{y}_1[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + (k_1 + k_3a_1^2)] - \bar{y}_2[(Jc^2 - Mab)p^2 + k_3a_1b_1] = \bar{Q}(a + l_0c) \quad (15)$$

$$\bar{y}_2[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + (k_2 + k_3b_1^2)] - \bar{y}_1[(Jc^2 - Mab)p^2 + k_3a_1b_1] = \bar{Q}(b - l_0c) \quad (16)$$

2. Система уравнений в операторной форме может быть представлена математической моделью в виде структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления. Как и в ранее (рис. 6) рассмотренном случае цепной системы полагается, что система обладает линейными свойствами и совершает малые колебания относительно положения статического равновесия.

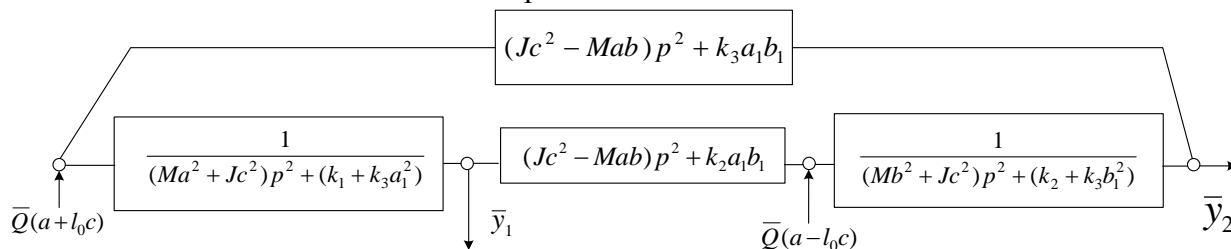


Рис. 6. Структурная математическая модель (структурная схема) механической колебательной системы с двумя степенями свободы на рис. 5

Структурная математическая модель состоит из двух парциальных блоков; имеет внешнее возмущение на входе каждой из парциальных систем. Динамические свойства такой системы отличаются *большим* разнообразием, чем обычная система цепного типа (рис. 1)

3. На частоте, определяемой выражением

$$\omega_{dyn}^2 = \frac{k_3a_1b_1}{Jc^2 - Mab} \quad (17)$$

система может разделиться на две автономные части, не влияющие друг на друга, что предопределяет возможность проявления специфического режима вибрационного взаимодействия элементов системы.

Передаточные функции системы могут быть построены на основе структурной схемы (рис.6) с учетом совместного действия силового возмущения:

$$W'_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}} = \frac{(a + l_0c)[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 + k_3b_1^2] + (b - l_0c)[(Jc^2 - Mab)p^2 - k_3a_1b_1]}{A_1(p)} \quad (18)$$

$$W'_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}} = \frac{(b - l_0c)[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_3a_1^2] + (a + l_0c)[(Jc^2 - Mab)p^2 - k_3a_1b_1]}{A_1(p)}, \quad (19)$$

где

$$A_1(p) = [(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 + k_3b_1^2][(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_3a_1^2] - [(Jc^2 - Mab)p^2 - k_3a_1b_1]^2 \quad (20)$$

является частотным характеристическим уравнением системы.

Рассматриваемая система обладает, кроме выше рассмотренного специфического динамического режима, ещё и двумя частотами режимов динамического гашения колебаний, которые получаются из решения частотных уравнений, формируемых при «обнулении» числителей передаточных функция  $W'_1(p)$  и  $W'_2(p)$ . Отметим также, что система имеет две частоты собственных колебаний и обладает возможностями работать в около резонансных режимах.

Связь между движениями системы по координатам  $y_1, y_2$  определяется параметрами передаточных функций межпарциальных связей  $W'_1(p) = \bar{y}_2 / \bar{y}_1$  с учетом совместного действия двух силовых факторов.

4. Если полагать, что силовые воздействия имеют частную форму, когда реализуется режим статических взаимодействий, то соотношение амплитуд колебаний по координатам  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  при  $p=0$  определяется выражением:

$$i'_1 = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{(b-l_0c)(k_1+k_3a_1^2) + (a+l_0c)(-k_3a_1b_1)}{(a+l_0c)(k_2+k_3b_1^2) + (b-l_0c)(-k_3a_1b_1)}, \quad (21)$$

Передаточное отношение (19) отображает особенности рычажных взаимодействий виртуального рычага, определяющиеся не только величиной передаточного отношения виртуального рычага, но и знаком.

5. При  $i'_1 = 1$  твёрдое тело ( $M, J$ ) совершает только поступательное движение по вертикали – рычажные свойства не реализуются, точка опоры виртуального рычага не идентифицируется.

При  $i'_1 = -1$  виртуальный рычаг обладает свойствами рычага второго рода, при этом точка опоры виртуального рычага располагается в центре твердого тела. Отметим также, что такая точка опоры виртуального рычага может рассматриваться как центр колебаний или центр вращения в координатах  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$  и  $\bar{y}_0, \bar{\varphi}$ .

При условиях, что  $i'_1$  является отрицательной величиной, но не совпадает с -1, центр колебаний (или точка опоры виртуального рычага) будет находиться между центральной точкой твердого тела и одной из крайних точек твердого тела (т.т.  $B_1$  и  $B_2$ ). При этом, как центр колебаний (или вращений) твердого тела при динамическом нагружении гармоническим внешним воздействием  $Q(t) \neq 0$ , такая «точка» реализуется на частотах режимов динамического гашения по координатам  $y_1, y_2$  соответственно.

Если  $i'_1$  имеет отрицательное значение, но находится за пределами участка (-1,0), то система трансформируется в рычаг 2-ого рода, точка опоры которого будет располагаться между точками ( $B_1$  и  $B_2$ ), точка, соответствующая  $i'_1 = -1$  находится в геометрическом центре протяженного твёрдого тела.

Если координаты  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  имеют одинаковые знаки, то виртуальный рычаг «вырождается» в структурное образование, совершающее поступательное движение по вертикали.

При отношении координат  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  больше единицы ( $i'_1 > 1$ ) точки опоры виртуального рычага смещается за пределы твердого тела.

Запишем выражение для определения передаточного отношения виртуального рычага в общем виде:

$$i'_1 = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{(b-l_0c)(k_2+k_3b_1^2) + (a+l_0c)(-k_3a_1b_1)}{(a+l_0c)(k_1+k_3a_1^2) + (b-l_0c)(-k_3a_1b_1)}, \quad (22)$$

Используя соотношение между параметрами виртуального рычага:

$$i'_1 = \frac{(l_1-l_0)[k_2+k_3(l_2-l_0)^2] + (l_2+l_0)[-k_2(l_1+l_0)(l_2-l_0)]}{(l_2+l_0)[k_1+k_3(l_2-l_0)^2] + (l_1+l_0)[-k_2(l_1+l_0)(l_2-l_0)]}, \quad (22')$$

Таким образом, состояние виртуального рычага формируется статическим приложением силы, которое формирует передаточное отношение в рычажной связи координат; при этом точка опоры рычага определяется с учетом знака передаточного отношения  $i'_1$  по методике, приведенной выше в разделе II. Точка приложения может находиться в различных местах твердого тела, что определяется параметрами и значениями приведённых значений жесткостей упругих элементов  $k_1, k_2, k_3$ .



**Заключение. 1.** Действие постоянной силы, рассматривается, как фактор формирования определенного статического состояния, относительно которого механическая колебательная система с двумя степенями свободы реализует особенности свойств, характерные для рычажного механизма. В зависимости от исходных условий, связанных с выбором параметров механической колебательной системы, возможно рассмотрение ситуаций, связанных с появлением структурного образования в виде виртуального рычага первого или второго рода с учетом особенностей локализации расположения опорных точек рычага; выявление мест расположения точек опоры совпадает с подходами в оценке свойств механических колебательных систем при определении расположения «центров вращения» (узлов колебаний) упругоинерциальных структур.

**2.** Вместе с тем необходимо отметить, что определенные состояния механических колебательных структур могут быть реализованы и на основе изменения физических параметров элементов системы; такими параметрами могут быть значения коэффициентов жесткости упругих элементов, координат расположения или крепления точек стыковки различных элементов системы и др. Неподвижная точка опоры виртуального рычага (рис. 5) находится в т.(В), положение которой может быть найдено на основе выражения:

$$i_{10} = \frac{(l_1 - l_0)[l_2 - l_0]^2 + (l_2 - l_0)(l_2 + l_0)(l_1 + l_0)}{(l_2 - l_0)[l_2 - l_0]^2 + (l_2 + l_0)(l_2 + l_0)(l_2 - l_0)}, \quad (23)$$

**3.** Механические колебательные системы с сосредоточенными параметрами широко используются как расчетные схемы в задачах динамики технических объектов транспортного и технологического назначения, работающих в условиях интенсивных и динамических и вибрационных нагрузок.

**4.** Действия внешних возмущений при статическом нагружении формируют определенное состояние распределения смещений отдельных точек системы, что можно рассматривать, как проявление рычажных связей, возникающих между характерными точками виртуального рычажного механизма.

**5.** Предлагается и развивается методологическая основа системных подходов в формировании рычажных связей, использующих методы структурного математического моделирования.

**6.** Рассмотрены особенности формирования виртуального рычага (или рычажных связей) на примерах механических колебательных систем цепного типа; показаны возможности использования аналитического аппарата теории автоматического управления. Механическая колебательная система, рассматриваемая, как виртуальный рычаг, позволяет оценить распределение.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фортов В.Е. Махутов Н.А. Машиностроение России: Состояние и развитие. М.:ОЭММПУ РАН. 2010. 72 с.
2. De Silva C.W. Vibration. Fundamentals and Practice // Boca Raton. London. New York. Washington. D.C.: CRC Press. 2000. P.957.
3. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing. Switzerland. 2016. P. 708.
4. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control. Vol.252.Springer International Publishing. Cham. 2020. P.521.
5. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность

- движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография. Иркутск: ИрГУПС. 2018. 692 с.
6. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. М.: Наука. Физматлит. 1997. 352 с.
  7. Димов А.В. Решение обобщенных задач виброзащиты и виброизоляции на основе структурных методов математического моделирования: автореферат дис. кандидата технических наук. Иркут. гос. ун-т путей сообщения. Иркутск. 2005. 23 с.
  8. Каимов Е.В. Рычажные связи и механизмы во взаимодействиях элементов машин и оборудования при вибрационных внешних возмущениях: автореферат дис. кандидата технических наук. Братск. 2016. 19 с.
  9. Артоболевский И.И. Механизмы в современной технике. Справочное пособие для инженеров, конструкторов и изобретателей. Том 1. Элементы механизмов. Простейшие рычажные и шарнирно-рычажные механизмы. Классика инженерной мысли: машиностроение URSS 2019г. 500с.
  10. Упырь Р.Ю. Динамика механических колебательных систем с учетом пространственных форм соединения элементарных звеньев: автореферат дис. кандидата технических наук.- Иркутск. 2009. 19 с.
  11. Драч М.А. Динамический синтез и моделирование в задачах оценки и изменения вибрационного состояния крутильных колебательных систем: автореферат дис. кандидата технических наук. Иркут. гос. ун-т путей сообщения. Иркутск. 2006. 24 с.
  12. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Каимов Е.В. Виртуальный рычажный механизм: динамическое гашение колебаний как форма проявления рычажных связей // Известия Транссиба. 2014. № 4 (20). С. 61-71.
  13. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. М.: Наука. 1959. 368 с.
  14. Выонг К.Ч. Новые возможности изменения динамических состояний вибрационных технологических машин // Системы. Методы. Технологии. 2018. № 2 (38). С. 25-31.
  15. Елисеев С.В., Кузнецов Н.К., Выонг К.Ч. Рычажные связи в задачах коррекции динамического состояния вибростенда // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2018. Т. 22. № 9 (140). С. 28-41.

## LEVER TIES: FEATURES OF STRUCTURAL INTERPRETATIONS

**Sergey V. Eliseev**

Doctor of Technical Sciences, Professor, Advisor to the Rector's Office for Scientific Work,  
e-mail: [eliseev\\_s@inbox.ru](mailto:eliseev_s@inbox.ru),

**Sergey K. Kargapoltsev**

Doctor of Technical Sciences,  
Professor of the Department «Automation of production processes», e-mail: [kck@irgups.ru](mailto:kck@irgups.ru),

**Andrey V. Eliseev**

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics,  
e-mail: [eavsh@ya.ru](mailto:eavsh@ya.ru),

Irkutsk State Transport University,  
664074, Irkutsk, Chernyshevsky str. 15.

**Abstract.** The article deals with the formation of a methodological basis for the system analysis of mechanical oscillatory structures that reflect the properties of transport and technological objects under conditions of vibrational dynamic loads. The aim of the study is to develop a method of analysis and dynamic synthesis in the problems of dynamics of mechanical oscillatory systems, focused on detailing ideas about the formation of generalized relationships between the parameters of the system and evaluating the features of the resulting lever relations. Methods of the general theory of systems, in particular, the analytical apparatus of the theory of automatic control are used. It is shown that the introduction of transfer functions of interpartial connections makes it possible to construct a scheme for evaluating and using specific properties of mechanical oscillatory systems. A method is proposed in which a mechanical oscillatory system with linear properties and concentrated parameters can be interpreted as a dynamically equivalent automatic control system. The transfer function of the system is constructed on the basis of differential equations of motion obtained within the framework of the Lagrange formalism with subsequent Laplace transformation, which creates a convenient platform for evaluating the dynamic properties of the system. It is shown that the transfer function without special connections, when the frequency of the external disturbance is zeroed, displays the properties of the virtual lever under static loading conditions. A number of new concepts about the manifestations of the lever properties of a mechanical oscillatory system at fixed frequencies of external harmonic in-phase disturbances are introduced and considered. The proposed method is illustrated by a number of examples.

**Keywords:** mechanical oscillatory system, block diagram, transfer function, lever connections, transfer relations.

### REFERENCES

1. Fortov V.E., Mahutov N.A; Mashinostroenie Rossii: Sostojanie i razvitie[Mechanical Engineering of Russia: State and development] //Rossijskaja akademija nauk. Otdelenie jenergetiki, mashinostroenija, mehaniki i processov upravlenija. M.: OJeMMPU RAN = Department of Power Engineering, Mechanical Engineering, Mechanics and Control Processes of the Russian Academy of Sciences. 2010. P.72.
2. De Silva C.W. Vibration. Fundamentals and Practice // Boca Raton. London. New York. Washington. D.C.: CRC Press. 2000. P. 957.
3. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing. Switzerland. 2016. P. 708.
4. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing. Cham. 2020. P.521.
5. Eliseev S.V. Prikladnoj sistemnyj analiz i strukturnoe matematicheskoe modelirovanie (dinamika transportnyh i tehnologicheskikh mashin: svjaznost' dvizhenij, vibracionnye vzaimodejstvija, rychazhnye svjazi) [Applied system analysis and structural mathematical

- modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections)]: monografija //Irkutsk: IrGUPS = Irkutsk State Transport University. 2018. P.692.
6. Emel'janov S.V., Korovin S.K. Novye tipy obratnoj svyazi: Upravlenie pri neopredelennosti [New types of feedback: Management under uncertainty]. M.: Nauka. Fizmatlit = Science. Fizmatlit. 1997. P.352.
  7. Dimov A.V. Reshenie obobshhennykh zadach vibrozashhity i vibroizoljatsii na osnove strukturnykh metodov matematicheskogo modelirovaniya [Solution of generalized problems of vibration protection and vibration isolation on the basis of structural methods of mathematical modeling]: avtoreferat dis. kandidata tehniceskikh nauk. //Irkut. gos. un-t putej soobshhenija = Irkutsk State Transport University. Irkutsk. 2005. P.23.
  8. Kaimov E.V. Rychazhnye svyazi i mehanizmy vo vzaimodejstviiyah jelementov mashin i oborudovaniya pri vibracionnykh vneshnih vozmushhenijah [Lever connections and mechanisms in the interactions of elements of machines and equipment under vibrational external disturbances]: avtoreferat dis. kandidata tehniceskikh nauk. Bratsk. 2016. P. 19.
  9. Artobolevskij I.I. Mehanizmy v sovremennoj tehnike. Spravochnoe posobie dlja inzhenerov, konstruktorov i izobretatelej. V 1. Jelementy mehanizmov. Prostejshie rychazhnye i sharnirno-rychazhnye mehanizmy [The simplest lever and hinge-lever mechanisms]. Moskva: Mashinostroenie URSS = URSS Publishing Group. 2019g. P.500.
  10. Upyr' R.Ju. Dinamika mehanicheskikh kolebatel'nykh sistem s uchetom prostranstvennykh form soedinenija jelementarnykh zven'ev [Dynamics of mechanical oscillatory systems taking into account spatial forms of connection of elementary links] : avtoreferat dis. kandidata tehniceskikh nauk: Irkutsk. 2009. P.19.
  11. Drach M.A. Dinamicheskij sintez i modelirovanie v zadachah ocenki i izmenenija vibracionnogo sostojanija krutil'nykh kolebatel'nykh sistem [Dynamic synthesis and modeling in problems of evaluation and change of the vibrational state of torsional oscillatory systems]: avtoreferat dis. kandidata tehniceskikh nauk //Irkut. gos. un-t putej soobshhenija = Irkutsk State Transport University. Irkutsk. 2006. P.24.
  12. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Kaimov E.V. Virtual'nyj rychazhnyj mehanizm: dinamicheskoe gashenie kolebanij kak forma projavlenija rychazhnykh svyazej [Virtual lever mechanism: dynamic damping of vibrations as a form of manifestation of lever connections] // Izvestija Transsiba= Proceedings Of The TRANS-Siberian Railway. 2014. № 4 (20). Pp. 61-71.
  13. Lur'e A.I. Operacionnoe ischislenie i primenenie v tehniceskikh prilozhenijah [Operational calculus and application in engineering applications]. M.: Nauka=Science. 1959. P. 368.
  14. Vyong K.Ch. Novye vozmozhnosti izmenenija dinamicheskikh sostojanij vibracionnykh tehnologicheskikh mashin [New opportunities for changing the dynamic states of vibrational technological machines] //Sistemy. Metody. Tehnologii = Systems. Methods. Technologies. 2018. № 2 (38). Pp. 25-31.
  15. Eliseev S.V., Kuznecov N.K., K.Ch. Vyong Rychazhnye svyazi v zadachah korrekcii dinamicheskogo sostojanija vibrostenda [Lever connections in problems of correction of the dynamic state of the vibrostand] // Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tehniceskogo universiteta = Bulletin of the Irkutsk State Technical University. 2018. T. 22. № 9 (140). Pp. 28-41.