

УДК 519.71+ 681.5+ 62.752

## СИСТЕМНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Елисеев Андрей Владимирович

К.т.н., доцент кафедры «Математика», e-mail: [eavsh@ya.ru](mailto:eavsh@ya.ru),

Иркутский государственный университет путей сообщения

664074, г.Иркутск, ул. Чернышевского 15.

**Аннотация.** Рассматриваются подходы в формировании методологического базиса системного анализа колебательных структур на примере упруго-диссипативных механических систем с двумя степенями свободы. Целью исследования является разработка метода оценки свойств механических колебательных систем с учетом сил вязкого трения на основе частотных функций и функции демпфирования в зависимости от коэффициентов форм связности. Для построения математических моделей используется формализм Лагранжа, матричные методы, элементы теории функций комплексной переменной. Представлены понятия частотной функции и функции демпфирования, отражающие особенности соотношения потенциальной, кинетической энергии системы с учетом сил вязкого трения, представленных диссипативной функцией. Разработан метод построения частотной функции и функции демпфирования, отражающих динамические особенности свободных движений с учетом сил трения в зависимости от коэффициента форм связности. На основе полученных общих аналитических выражений частотных функций и функций демпфирования проведен анализ особых вариантов механических колебательных систем, представляющих интерес на начальном этапе исследования. Разработанный метод построения частотной функции и функции демпфирования может быть использован для отображения динамических форм связности движений механических колебательных систем. Предложенный метод построения частотной функции и функции демпфирования может быть обобщен на механические колебательные системы, рассматриваемые в различных системах координат.

**Ключевые слова:** механическая система, динамические связи, частотная функция, функция демпфирования, связность движений, экстремальные свойства, колебание, вязкое трение.

**Цитирование:** Елисеев А. В. Системные представления динамических процессов в механических колебательных системах с особенностями // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2020. № 4 (20). С. 93-107. DOI: 10.38028/ESI.2020.20.4.009

**Введение.** Оценке динамических свойств технических объектов, работающих в условиях интенсивных вибрационных нагрузок, уделяется существенное внимание [1, 2, 9-11]. К числу известных подходов можно отнести идеи оценки особенностей динамических свойств систем через отношение потенциальной и кинетической энергии [6, 7]. Использование частотной функции для исследования динамики механических колебательных систем без

учета сил трения инициирует интерес к расширению области её применения в задачах динамики, связанных с учетом так называемых коэффициентов форм связности [3-5, 8].

Вместе с тем, для механических колебательных систем с учетом сил вязкого трения методы построения частотной функции требуют детализации в зависимости от величины вязкого трения, в частности, для систем с апериодическим движением понятие частоты колебания может терять смысл, и тогда функцией, отражающей особенности движения системы, становится функция демпфирования, также зависящая от коэффициента форм связности движения.

Предлагаемая работа посвящена развитию метода оценки свойств механических колебательных систем с учетом сил вязкого трения на основе частотных функций и функции демпфирования в зависимости от коэффициентов форм связности.

**I. Основные положения. Постановка задачи.** Рассматриваются свободные движения механической упруго-диссипативной системы с сосредоточенными параметрами с двумя степенями свободы. Принципиальная схема системы представлена на рисунке 1.

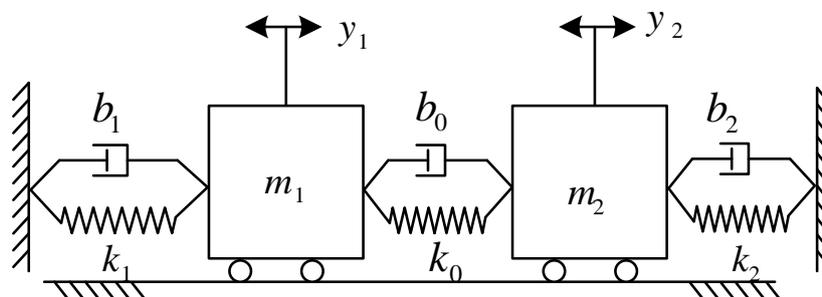


Рис. 1. Механическая колебательная система с учетом вязкого трения

Обобщенные координаты  $y_1, y_2$  обозначают смещение массо-инерционных элементов  $m_1, m_2$  относительно положения статического равновесия. Кинетическая энергия  $T$ , потенциальная энергия  $\Pi$  и функция рассеяния  $F$  имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2, \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2 + \frac{1}{2} k_0 (y_2 - y_1)^2, \quad (2)$$

$$F = \frac{1}{2} b_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} b_0 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{y}_2^2. \quad (3)$$

Система уравнений Лагранжа второго рода имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_1} = 0; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_2} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

После подстановки выражений  $T, \Pi, F$  система дифференциальных уравнений (4) принимает вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + (b_0 + b_1) \dot{y}_1 - b_0 \dot{y}_2 + (k_0 + k_1) y_1 - k_0 y_2 = 0; \\ m_2 \ddot{y}_2 + (b_0 + b_2) \dot{y}_2 - b_0 \dot{y}_1 + (k_0 + k_2) y_2 - k_0 y_1 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Формы свободных движений представленной системы (5) в общем случае определяются собственными числами характеристического уравнения с учетом их кратности. Рассматривается случай простых корней. Таким образом, пусть решение  $y_1 = y_1(t)$ ,  $y_2 = y_2(t)$  системы (5) представимо в виде:

$$\vec{y} = \vec{Y}e^{pt}, \quad (6)$$

где  $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$  – вектор-решение,  $\vec{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$  – числовой вектор,  $p = \sigma + j\omega$  – комплексный параметр,  $t$  – переменная времени. Полагается, что начальные условия согласованы с видом искомого решения (6).

Задача заключается в построении и оценке экстремальных свойств функций, отображающих характеристики собственных движений системы с учетом сил вязкого трения.

**II. Построение частотной функции и функции диссипации на основе энергетического соотношения.** Система (5) в обозначениях (6) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} m_1 p^2 + (b_0 + b_1)p + k_0 + k_1 & -b_0 p - k_0 \\ -b_0 p - k_0 & m_2 p^2 + (b_0 + b_2)p + k_0 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (7)$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 + b_1 & -b_0 \\ -b_0 & b_0 + b_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_0 \\ -k_0 & k_0 + k_2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

С учетом (8) матричное соотношение (5) принимает вид:

$$(p^2 A + pB + C)\vec{Y} = 0. \quad (9)$$

На основе матричного соотношения (9) могут быть получены различные скалярные уравнения, с учетом экстремальных свойств которых, в свою очередь, могут быть определены свойства решения  $p$  уравнения (9). В частности, скалярное умножение левой и правой части равенства (9) на вектор  $\vec{Y}$  приводит к скалярному выражению:

$$p^2 \langle A\vec{Y}, \vec{Y} \rangle + p \langle B\vec{Y}, \vec{Y} \rangle + \langle C\vec{Y}, \vec{Y} \rangle = 0. \quad (10)$$

С помощью подстановки  $p = \sigma + j\omega$  приведем (10) к виду:

$$(\sigma^2 - \omega^2 + 2j\sigma\omega) \langle A\vec{Y}, \vec{Y} \rangle + (\sigma + j\omega) \langle B\vec{Y}, \vec{Y} \rangle + \langle C\vec{Y}, \vec{Y} \rangle = 0, \quad (11)$$

Пусть для координат вектора  $\vec{Y}$  выполнено соотношение:

$$Y_2 = \alpha Y_1, \quad (12)$$

где  $\alpha$  – коэффициент формы связности. В этом случае вектор  $\vec{Y}$  может быть представлен в виде:

$$\vec{Y} = Y_1 \vec{\alpha}, \quad (13)$$

где  $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$  – вектор, определяемый коэффициентом связности  $\alpha$ . После подстановки (13)

выражение (11) принимает вид:

$$(\sigma^2 - \omega^2 + 2j\sigma\omega)A_\alpha + (\sigma + j\omega)B_\alpha + C_\alpha = 0, \quad (14)$$

где  $A_\alpha = \langle A\vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle$ ,  $B_\alpha = \langle B\vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle$ ,  $C_\alpha = \langle C\vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle$  – скалярные функции коэффициента формы связности  $\alpha$ . Уравнение (14) может быть представлено в эквивалентном виде:

$$\begin{cases} \omega^2 A_\alpha = \sigma^2 A_\alpha + \sigma B_\alpha + C_\alpha; \\ 2\sigma\omega A_\alpha + \omega B_\alpha = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Найдём решение системы (15) относительно  $\sigma, \omega$ , как функций  $\alpha$ . Функция  $\omega(\alpha)$  рассматривается как частотная функция,  $\sigma(\alpha)$  – функция демпфирования. Особенности решения системы определяются знаком выражения  $\sigma^2 A_\alpha + \sigma B_\alpha + C_\alpha$ .

*Учет диссипации.* Уровень диссипации энергии может быть охарактеризован дискриминантом  $B_\alpha^2 - 4A_\alpha C_\alpha$ . При условии:

$$B_\alpha^2 < 4A_\alpha C_\alpha, \quad (16)$$

понимаемом, как малость трения, решение (15) может быть представлено в виде:

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{C_\alpha}{A_\alpha} - \left(\frac{B_\alpha}{2A_\alpha}\right)^2; \\ \sigma = -\frac{B_\alpha}{2A_\alpha}. \end{cases} \quad (17)$$

Необходимо отметить, что при выполнении условий малости сил вязкого трения (16) выполнено равенство:

$$\omega^2 + \sigma^2 = \frac{C_\alpha}{A_\alpha}. \quad (18)$$

При условии «больших сил вязкого трения»:

$$B_\alpha^2 > 4A_\alpha C_\alpha, \quad (19)$$

решение (15) может быть представлено в виде:

$$\omega = 0, \quad (20) \quad \sigma_1(\alpha) = -\frac{B_\alpha}{2A_\alpha} - \sqrt{\left(\frac{B_\alpha}{2A_\alpha}\right)^2 - \frac{C_\alpha}{A_\alpha}}, \quad \sigma_2(\alpha) = -\frac{B_\alpha}{2A_\alpha} + \sqrt{\left(\frac{B_\alpha}{2A_\alpha}\right)^2 - \frac{C_\alpha}{A_\alpha}}. \quad (21)$$

Функции демпфирования имеют две компоненты  $\sigma_1(\alpha)$ ,  $\sigma_2(\alpha)$ , такие, что:

$$\sigma_1(\alpha) + \sigma_2(\alpha) = -\frac{B_\alpha}{A_\alpha}, \quad \sigma_1(\alpha) \cdot \sigma_2(\alpha) = \frac{C_\alpha}{A_\alpha}. \quad (22)$$

Таким образом, в зависимости от уровня сил вязкого трения возможны различные виды представления частотной функции и функции демпфирования. Если  $B_\alpha^2 - 4A_\alpha C_\alpha < 0$ , то определена частотная функция  $\omega^2(\alpha)$  и одна компонента функции демпфирования  $\sigma(\alpha)$ . Если  $B_\alpha^2 - 4A_\alpha C_\alpha > 0$ , то предполагается, что частотная функция  $\omega^2(\alpha)$  принимает нулевые значения, а функция демпфирования имеет две различные отрицательные компоненты  $\sigma_1(\alpha)$ ,  $\sigma_2(\alpha)$ . Что касается условия  $B_\alpha^2 - 4A_\alpha C_\alpha = 0$ , то оно требует отдельного анализа. Вместе с тем, условие  $B_\alpha^2 - 4A_\alpha C_\alpha = 0$  может быть интерпретировано как граница двух различных режимов движения механической системы.

Представленные аналитические выражения частотной функции, функции демпфирования и условий «малых» и «больших» сил вязкого трения могут быть детализированы при рассмотрении частных вариантов механических колебательных систем, полученных на основе системы с двумя степенями свободы.

**III. Частотная функция и функция демпфирования для механической системы с двумя степенями свободы.** Рассматриваются варианты параметров для механической системы, представленной на рисунке 1. Предполагается, что множество граничных параметров, разделяющих режимы движения при малых и больших силах вязкого трения, определяется уравнением:

$$B_{\alpha}^2 = 4A_{\alpha}C_{\alpha}, \quad (23)$$

где:

$$A_{\alpha} = m_1 + m_2\alpha^2, \quad (24) \quad B_{\alpha} = (b_0 + b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1, \quad (25) \quad C_{\alpha} = (k_0 + k_2)\alpha^2 - 2\alpha k_0 + k_0 + k_1. \quad (26)$$

Условия малости сил вязкого трения имеют форму:

$$B_{\alpha}^2 < 4A_{\alpha}C_{\alpha}. \quad (27)$$

В этом случае частотная функция  $\omega^2(\alpha)$  и функция демпфирования  $\sigma(\alpha)$ :

$$\begin{cases} \omega^2(\alpha) = \frac{(k_0 + k_2)\alpha^2 - 2\alpha k_0 + k_0 + k_1}{m_1 + m_2\alpha^2} - \left(\frac{1}{2} \frac{(b_0 + b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2\alpha^2}\right)^2 \\ \sigma(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{(b_0 + b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2\alpha^2} \end{cases}. \quad (28)$$

Условия больших сил вязкого трения имеют форму:

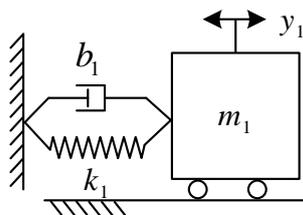
$$B_{\alpha}^2 > 4A_{\alpha}C_{\alpha}. \quad (29)$$

При условиях (29) функции  $\omega^2$  и  $\sigma(\alpha)$  имеют вид:

$$\begin{cases} \omega^2 = 0; \\ \sigma_1(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{(b_0 + b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2\alpha^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{(b_0 + b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2\alpha^2}\right)^2 - \frac{(k_0 + k_2)\alpha^2 - 2\alpha k_0 + k_0 + k_1}{m_1 + m_2\alpha^2}}; \\ \sigma_2(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{(b_0 + b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2\alpha^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{(b_0 + b_2)\alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2\alpha^2}\right)^2 - \frac{(k_0 + k_2)\alpha^2 - 2\alpha k_0 + k_0 + k_1}{m_1 + m_2\alpha^2}}. \end{cases} \quad (31)$$

Представленные выражения отражают движения в форме экспоненциального убывания при отсутствии колебаний. На основе общего варианта механической колебательной системы могут быть построены частные случаи.

**IV. Частотная функция и функция демпфирования для механической системы с одной степенью свободы.** Особенным, в некотором роде вырожденным, случаем является система с одной степенью свободы, так как представляет собою вариант парциальной системы. Для рассмотрения системы с одной степенью свободы положим, что в исходной системе на рис. 1  $b_0 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $k_0 = 0$ ,  $k_2 = 0$ ,  $m_2 = 0$ . Принципиальная схема системы представлена на рис. 2. Необходимо отметить, что рассматриваемая система (рис. 2) не является системой с двумя степенями свободы. Вместе с тем, соответствующие системе частотные функции и функции демпфирования представляют интерес на начальном этапе исследования в качестве базы для сравнения.



**Рис. 2.** Принципиальная схема системы с одной степенью свободы

Система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$m_1 \ddot{y}_1 + b_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 = 0. \quad (32)$$

Величины  $A_\alpha$ ,  $B_\alpha$ ,  $C_\alpha$  имеют вид:

$$A_\alpha = m_1, \quad (33)$$

$$B_\alpha = b_1, \quad (34)$$

$$C_\alpha = k_1. \quad (35)$$

Множество граничных параметров определяется уравнением:

$$\left(\frac{b_1}{2m_1}\right)^2 = \frac{k_1}{m_1}. \quad (36)$$

Условие малости сил трения имеет вид:

$$\left(\frac{b_1}{2m_1}\right)^2 < \frac{k_1}{m_1}. \quad (37)$$

Частотная функция  $\omega^2(\alpha)$  и функция демпфирования  $\sigma(\alpha)$  принимают вид:

$$\begin{cases} \omega^2(\alpha) = \frac{k_1}{m_1} - \left(\frac{1}{2} \frac{b_1}{m_1}\right)^2; \\ \sigma(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{b_1}{m_1}. \end{cases} \quad (38)$$

Условий больших сил трения имеют вид:

$$\left(\frac{b_1}{2m_1}\right)^2 > \frac{k_1}{m_1}. \quad (39)$$

Частотная функция  $\omega^2(\alpha)$  и функция демпфирования  $\sigma(\alpha)$ :

$$\begin{cases} \omega^2 = 0; \\ \sigma_1(\alpha) = -\frac{b_1}{2m_1} - \sqrt{\left(\frac{b_1}{2m_1}\right)^2 - \frac{k_1}{m_1}}; \\ \sigma_2(\alpha) = -\frac{b_1}{2m_1} + \sqrt{\left(\frac{b_1}{2m_1}\right)^2 - \frac{k_1}{m_1}}, \end{cases} \quad (40)$$

где функция демпфирования  $\sigma(\alpha)$  представлена компонентами  $\sigma_1(\alpha)$ ,  $\sigma_2(\alpha)$  для  $\alpha$ , для которого выполнено условие (39).

В случае граничных параметров:

$$\left(\frac{b_1}{2m_1}\right)^2 = \frac{k_1}{m_1}. \quad (41)$$

частотная функция  $\omega^2(\alpha)$  и функция демпфирования  $\sigma(\alpha)$  имеют вид:

$$\begin{cases} \omega^2(\alpha) = 0; \\ \sigma(\alpha) = -\frac{b_1}{2m_1}. \end{cases} \quad (42)$$

При этом необходимо заметить, что данный вариант условий (41) выходит за рамки настоящего исследования.

Отметим, что граничный вариант отсутствия упругого элемента  $k_1 = 0$ ,  $b_1 > 0$  соответствует условию большого трения:

$$\begin{cases} \omega^2 = 0; \\ \sigma_1(\alpha) = -\frac{b_1}{m_1}; \\ \sigma_2(\alpha) = 0. \end{cases} \quad (43)$$

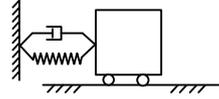
Вместе с тем, граничный вариант отсутствия диссипативного элемента  $k_1 > 0$ ,  $b_1 = 0$  приводит к выражению:

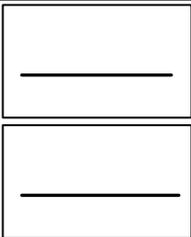
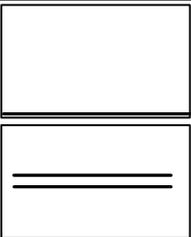
$$\begin{cases} \omega^2(\alpha) = \frac{k_1}{m_1}; \\ \sigma(\alpha) = 0. \end{cases} \quad (44)$$

Представленная система функций может быть интерпретирована как наличие гармонических форм движения.

Сводная информация о характеристиках системы представлена в таблице 1.

**Таблица 1.** Сводная информация

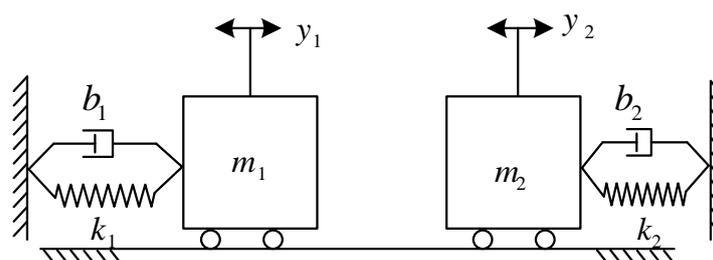
Вариант	Механическая колебательная система с одной степенью свободы
Параметры	$b_0 = 0, b_2 = 0, k_0 = 0, k_2 = 0,$
Схема	
Частотная функция	$\omega^2(\alpha) = \frac{k_1}{m_1} - \left(\frac{1}{2} \frac{b_1}{m_1}\right)^2$
Функция демпфирования	$\sigma(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{b_1}{m_1}$
Двухкомпонентная функция демпфирования	$\begin{cases} \sigma_1(\alpha) = -\frac{b_1}{2m_1} - \sqrt{\left(\frac{b_1}{2m_1}\right)^2 - \frac{k_1}{m_1}}; \\ \sigma_2(\alpha) = -\frac{b_1}{2m_1} + \sqrt{\left(\frac{b_1}{2m_1}\right)^2 - \frac{k_1}{m_1}}, \end{cases}$
Параметризирующее неравенство	$\left(\frac{b_1}{2m_1}\right)^2 < \frac{k_1}{m_1}$

Характерные формы сочетания частотной функции и функции демпфирования		
	(1.1)	(1.2)

В строке «Характерные формы сочетания частотной функции и функции демпфирования» таблицы 1 приведены парные пиктограммы, образованные верхним прямоугольником, отображающим схематически неотрицательную частотную функцию, и нижним прямоугольником – неположительные функции демпфирования, имеющие либо одну, либо две компоненты в зависимости от условий малости сил вязкого трения. В частности, пиктограмма (1.1) отображает тот факт, что частотная функция принимает постоянное положительное значение, а функция демпфирования имеет одну компоненту, принимающую постоянное отрицательное значение. Вместе с тем, пиктограмма (1.2) отображает тот факт, что существует набор параметров, для которых частотная функция принимает нулевое значение, а функция демпфирования имеет две компоненты, принимающие отрицательные постоянные значения.

**V. Механическая система с двумя несвязанными парциальными системами.**

Рассматривается механическая колебательная система (рис. 1) с параметрами  $b_0 = 0, k_0 = 0$ . Расчетная схема представлена на рисунке 3. Рассматриваемая система представляет собой также вырожденный вариант системы с двумя степенями свободы, главной особенностью которого является отсутствие упруго-диссипативной связи между массо-инерционными элементами. Вместе с тем, система (рис.1) представляет интерес в плане базы для сравнения на начальном этапе оценки разнообразия видов частотных функций и функций демпфирования.



**Рис. 3.** Механическая колебательная система с двумя несвязанными парциальными системами  $b_0 = 0, k_0 = 0$

Система дифференциальных уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + b_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 = 0; \\ m_2 \ddot{y}_2 + b_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 = 0. \end{cases} \quad (45)$$

Компоненты  $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$  имеют вид четных функций:

$$A_\alpha = m_1 + m_2 \alpha^2, \quad (46)$$

$$B_\alpha = b_2 \alpha^2 + b_1, \quad (47)$$

$$C_\alpha = k_2 \alpha^2 + k_1. \quad (48)$$

На основе представленных компонент могут быть построены частотная функция, функция демпфирования и условия на величину диссипации.

*Учет диссипации.* Граничные условия могут быть представлены в виде:

$$\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{b_2 \alpha^2 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} \right)^2 = \frac{k_2 \alpha^2 + k_1}{m_1 + m_2 \alpha^2}. \quad (49)$$

При малых силах вязкого трения функции  $\omega^2(\alpha)$  и  $\sigma(\alpha)$  принимают вид:

$$\begin{cases} \omega^2(\alpha) = \frac{k_2 \alpha^2 + k_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} - \left( \frac{1}{2} \frac{b_2 \alpha^2 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} \right)^2 \\ \sigma(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{b_2 \alpha^2 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} \end{cases}. \quad (50)$$

При больших силах трения функции  $\omega^2(\alpha)$ ,  $\sigma(\alpha)$  имеют значения:

$$\begin{cases} \omega^2(\alpha) = 0; \\ \sigma_1(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{b_2 \alpha^2 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} - \sqrt{\left( \frac{1}{2} \frac{b_2 \alpha^2 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} \right)^2 - \frac{k_2 \alpha^2 + k_1}{m_1 + m_2 \alpha^2}}; \\ \sigma_2(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{b_2 \alpha^2 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} + \sqrt{\left( \frac{1}{2} \frac{b_2 \alpha^2 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} \right)^2 - \frac{k_2 \alpha^2 + k_1}{m_1 + m_2 \alpha^2}}. \end{cases} \quad (51)$$

*Экстремальные и предельные свойства частотной функции и функции демпфирования.* Определим производные частотной функции и функции демпфирования:

$$\begin{cases} \omega^2(\alpha)' = \frac{2\alpha}{(m_1 + m_2 \alpha^2)^2} [(m_2 k_1 - m_1 k_2) + \frac{b_2 \alpha^2 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} \cdot (b_2 m_1 - b_1 m_2)]; \\ \sigma(\alpha)' = -\frac{\alpha(b_2 m_1 - b_1 m_2)}{(m_1 + m_2 \alpha^2)^2}. \end{cases} \quad (52)$$

В точке  $\alpha = 0$  производные  $\omega^2(\alpha)'$ ,  $\sigma(\alpha)'$  равны нулю. При условии, что функции монотонны на интервале  $(0, \infty)$  можно полагать, что экстремальные значения функции достигают при  $\alpha = 0$  и  $\alpha \rightarrow \infty$ . Если  $\alpha = 0$ , то:

$$\begin{cases} \omega^2(0) = \frac{k_1}{m_1} - \left( \frac{1}{2} \frac{b_1}{m_1} \right)^2; \\ \sigma(0) = -\frac{1}{2} \frac{b_1}{m_1}. \end{cases} \quad (53)$$

Если  $\alpha \rightarrow \infty$ , то

$$\begin{cases} \omega^2(\alpha) \rightarrow \frac{k_2}{m_2} - \left( \frac{1}{2} \frac{b_2}{m_2} \right)^2; \\ \sigma(\alpha) \rightarrow -\frac{1}{2} \frac{b_2}{m_2}. \end{cases} \quad (54)$$

*Характерные формы частотных функций и функций демпфирования.* Рассмотрим экстремальные значения частотной функции  $\omega^2(\alpha)$  и функции демпфирования  $\sigma(\alpha)$  при больших силах трения. Полагаем, что для любого  $\alpha$  выполнено:

$$\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{b_2 \alpha^2 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} \right)^2 > \frac{k_2 \alpha^2 + k_1}{m_1 + m_2 \alpha^2}. \quad (55)$$

Рассмотрим семейство механических систем с параметрами  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 6$ ,  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 5$  в предположении, что выполнено соотношение  $b_2 = \lambda b_1$ ,  $\lambda = 0.35$ . В этом случае условие малости сил трения принимает вид:

$$\gamma_0 < M(\alpha), \quad (56)$$

где параметр  $\gamma_0 = \frac{b_2^2}{4k_2}$  отражает упруго-диссипативные свойства системы,

$$M(\alpha) = \frac{(m_1 + m_2 \alpha^2)(\alpha^2 + \frac{k_1}{k_2})}{(\alpha^2 + \lambda)^2} \text{ параметризирующая функция коэффициента формы } \alpha.$$

Функция  $M(\alpha)$  представлена на рисунке 4(а). Значение параметра  $b_1$  определяет области, в которых выполняется условие малости сил трения. Критические значения  $b_1$  определяются экстремальными значениями функции  $M(\alpha)$  и предельными значениями при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Положим, что  $M_0$  – значение локального минимума в точке  $\alpha_0 = 0$ ,  $M_1$  – величина локального максимума в точке  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Можно указать четыре варианта относительного положения коэффициента  $\gamma_0$

**1.** Пусть  $\gamma_0 < m_2$ . Пусть  $b_2 = 1$ ,  $\gamma_0 \approx 0.42$ . В этом случае для любого коэффициента формы  $\alpha \in (-\infty, \infty)$  выполнены условия малости сил трения. На рисунках 4(б) и 4(г) представлены частотная функция  $\omega^2(\alpha)$  и функция демпфирования  $\sigma(\alpha)$ . Корни уравнения, представляющего собой равенство нулю определителя:

$$|Ap^2 + Bp + C| = 0 \quad (57)$$

составляют  $p_i = \omega_i + j\sigma_i$ ,  $i = 1..4$ , где вещественные части  $\sigma_1 \approx -0.1$ ,  $\sigma_2 \approx -0.1$ ,  $\sigma_3 \approx -0.18$ ,  $\sigma_4 \approx -0.18$ , комплексные части  $\omega_1 \approx 1.09$ ,  $\omega_2 \approx -1.09$ ,  $\omega_3 \approx 1.99$ ,  $\omega_4 \approx -1.99$ . На рисунке 4(б) частотная функция достигает экстремальных значений, равных квадратам частот  $\omega_3^2 \approx 3.97$  и  $\omega_1^2 \approx 1.19$  в точках  $\alpha_1^* = 0$  и  $\alpha_2^* = \infty$  соответственно. На рисунке 4(г) функция демпфирования достигает экстремальные значения, которые составляют  $\sigma_3 \approx -0.18$  и  $\sigma_1 \approx -0.1$  в точках  $\alpha_1^* = 0$  и  $\alpha_2^* = \infty$  соответственно.

**2.** Пусть  $m_2 < \gamma_0 < M_0$ . Рассматриваются параметры  $b_2 = 11.2$ ,  $\gamma_0 \approx 5.23$ . Условие реализации малости сил трения нарушаются на интервале  $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty)$ , где  $\alpha_1 \approx -1.74$ ,  $\alpha_2 \approx 1.74$  - корни уравнения  $\gamma_0 = M(\alpha)$ . Для рассматриваемых параметров корни уравнения (51) имеют соответствующие вещественные части  $\sigma_1 \approx -0.89$ ,  $\sigma_2 \approx -1.35$ ,  $\sigma_3 \approx -1.96$ ,

$\sigma_4 \approx -1.96$  и мнимые части  $\omega_1 \approx 0$ ,  $\omega_2 \approx 0$ ,  $\omega_3 \approx 0.40$ ,  $\omega_4 \approx -0.40$ . Соответствующие частотная функция и функция демпфирования приведены на рисунках 4(с) и 4(г). На интервале  $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty)$  частотная функция равна нулю, а на интервале  $(\alpha_1, \alpha_2)$  положительна и достигает локальный минимум в точке  $\alpha_2^* = 0$  равный  $\omega_3^2 \approx 0.16$ . В свою очередь, функция демпфирования в интервале  $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty)$  двузначна и достигает экстремальных значений при  $\alpha \rightarrow \infty$ , которые составляют  $\sigma_1 \approx -0.89$ ,  $\sigma_2 \approx -1.35$ . В области  $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty)$  функция затухания однозначна и имеет один локальный экстремум  $\sigma_4 \approx -1.96$  в точке  $\alpha_2^* = 0$ .

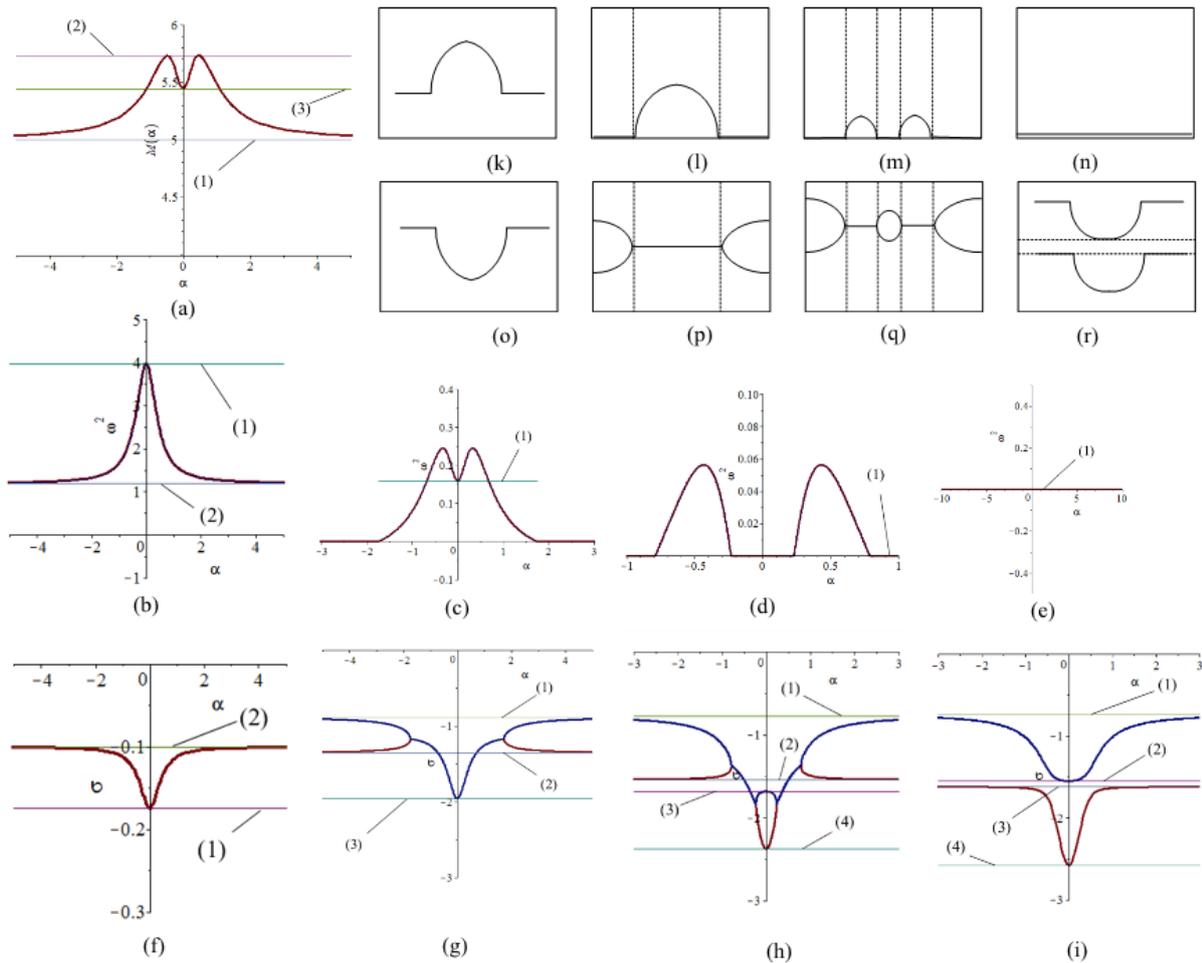
**3.** Пусть  $M_0 < \gamma_0 < M_1$ ,  $b_2 = 11.6$ ,  $\gamma_0 \approx 5.61$  Условие реализации малости колебаний нарушаются на множестве  $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \alpha_3) \cup (\alpha_4, \infty)$ ,

где  $\alpha_1 \approx -0.79$ ,  $\alpha_2 \approx -0.23$ ,  $\alpha_3 \approx 0.23$ ,  $\alpha_4 \approx 0.79$  – корни уравнения  $\gamma_0 = M(\alpha)$ .

Для рассматриваемых параметров корни уравнения (61) имеют соответствующие вещественные  $\sigma_1 \approx -0.78$ ,  $\sigma_2 \approx -1.54$ ,  $\sigma_3 \approx -1.68$ ,  $\sigma_4 \approx -2.38$  и мнимые части  $\omega_1 \approx 0$ ,  $\omega_2 \approx 0$ ,  $\omega_3 \approx 0$ ,  $\omega_4 \approx 0$ . Соответствующие частотная функция и функция демпфирования приведены на рисунках 4(d) и 4(h). На множестве  $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \alpha_3) \cup (\alpha_4, \infty)$  частотная функция равна нулю, а на множестве  $(\alpha_1, \alpha_2) \cup (\alpha_3, \alpha_4)$  положительна, имеет экстремальные значения, которые не совпадают с нулевой собственной частотой  $\omega_1 \approx 0$ . В свою очередь, функция демпфирования в интервале  $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \alpha_3) \cup (\alpha_4, \infty)$  двузначна и достигает экстремальных значений  $\sigma_3 \approx -1.68$ ,  $\sigma_4 \approx -2.38$  в точке  $\alpha_1^* = 0$  и при  $\alpha \rightarrow \infty$  приближается к  $\sigma_1 \approx -0.78$ ,  $\sigma_2 \approx -1.54$ . В области  $(\alpha_1, \alpha_2) \cup (\alpha_3, \alpha_4)$  функция затухания однозначна.

**4.** Пусть  $M_1 < \gamma_0$ ,  $b_2 = 11.8$ ,  $\gamma_0 \approx 5.8$  Условие реализации малости сил трения нарушаются на всей вещественной оси. Для рассматриваемых параметров корни уравнения (51) имеют вещественные  $\sigma_1 \approx -0.58$ ,  $\sigma_2 \approx -2.07$ ,  $\sigma_3 \approx -1.15$ ,  $\sigma_4 \approx -3.49$  и мнимые части  $\omega_1 \approx 0$ ,  $\omega_2 \approx 0$ ,  $\omega_3 \approx 0$ ,  $\omega_4 \approx 0$ . Частотная функция и функция демпфирования приведены на рисунках 4(е) и е(i). Частотная функция равна нулю. Функция демпфирования в интервале двузначна на всей вещественной оси и достигает экстремальные значения  $\sigma_4 \approx -3.49$ ,  $\sigma_2 \approx -2.07$  в точке  $\alpha_1^* = 0$  и при  $\alpha \rightarrow \infty$  приближается к  $\sigma_1 \approx -0.58$ ,  $\sigma_3 \approx -1.15$ .

На рисунка 4(k)-4(r) приведены парные пиктограммы, образованные верхним прямоугольником (рис. 4(k)-4(n)), отображающим схематически неотрицательную частотную функцию, и нижним прямоугольником (рис. 4(o)-4(r)), отображающим неположительные функции демпфирования, имеющие либо одну, либо две компоненты в зависимости от выполнения условий малости сил вязкого трения. Приведенные парные пиктограммы отображают существенные свойства частотной функции и функции демпфирования, представленные на рисунках 4(b)-4(i). К существенным свойствам следует отнести равенство нулю частотной функции на интервале и наличие двух или одной компоненты у функции демпфирования.



**Рис. 4.** Особенности формирования частотной функции и функции демпфирования: (а) – график параметризующей функции семейства механических систем; (b)-(е) – частотные функции; (f)-(i) – функции демпфирования; (k)-(n) – пиктограммы соответствующих частотных функций (b)-(е); (o)-(r) – пиктограммы соответствующих функций демпфирования (f)-(i)

Таким образом, для рассмотренных механических систем можно предположить, что экстремальные значения совокупности частотной функции и функции демпфирования отражают такие динамические параметры, как собственные характеристики системы.

**Заключение.** По результатам представленных исследований возможны следующие выводы.

1. Для механической колебательной системы с двумя степенями свободы разработан метод построения частотной функции и функции демпфирования, отражающих динамические особенности свободных движений с учетом сил трения в зависимости от коэффициента форм связности.

2. Показано, что определенная совокупность частотной функции и функции демпфирования для механической колебательной с двумя степенями системы с учетом вязкого трения может быть представлена, в общем случае, тремя вещественными функциями, значения которых определяются уровнем диссипации энергии или величиной сил вязкого трения для фиксированного значения коэффициента форм.

3. Показано, что для условий малых сил вязкого трения значения частотной функции принимают положительные значения, а функция демпфирования имеет одну отрицательную компоненту. Если выполнены условия больших сил вязкого трения, то частотная функция рассматривается, как нулевая функция, а функция демпфирования имеет две отрицательные компоненты.

4. Показано, что совокупность экстремальных значений частотной функции и функции демпфирования отображает собственные характеристики упруго-диссипативной механической системы.

5. Предложенный матричный метод построения частотно-демпфирующей функции для системы с двумя степенями свободы может быть распространен на механические колебательные системы, рассматриваемые в различных системах координат.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елисеев А. В. Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и связи элементов: монография / А. В. Елисеев, Н. К. Кузнецов, А. О. Московских. // Москва: Инновационное машиностроение. 2019. 381 с.
2. Елисеев С. В. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем / Елисеев С. В., Артюнин А. И.- Наука, Новосибирск. 2016. с. 459
3. Елисеев С.В. О возможностях использования дополнительных связей инерционного типа в задачах динамики технических систем / Елисеев С.В., Кузнецов Н.К., Большаков Р.С., Нгуен Д.Х. // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2016. № 5 (112). С. 19-36.
4. Елисеев С.В. Определение частот собственных колебаний механических колебательных систем: особенности использования частотной энергетической функции. Часть I. / Елисеев С.В., Большаков Р.С., Нгуен Д.Х., Вьюнг К.Ч. // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2016. № 6 (113). С. 26-33.
5. Елисеев С.В. Определение частот собственных колебаний механических колебательных систем: особенности использования частотной энергетической функции. Часть II. / Елисеев С.В., Большаков Р.С., Нгуен Д.Х., Вьюнг К.Ч. // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2016. № 7 (114). С. 10-23.
6. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография / С.В. Елисеев; отв. ред. А.И. Артюнин. – Иркутск: ИрГУПС. 2018. 692 с.
7. Стретт Дж. В. Теория звука. М.: ГИТТЛ. 1955. Т.1. 503 с.
8. Хоменко А.П. Развитие энергетического метода определения частот свободных колебаний механических систем / Хоменко А.П., Елисеев С.В. // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 1 (49). С. 8-19.
9. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press. 2000. 957 p.
10. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing. Cham. 2020. 521 p.

11. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland. 2016. 708 p.

УДК 519.71+ 681.5+ 62.752

## SYSTEM REPRESENTATIONS OF DYNAMIC PROCESSES IN MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS WITH SPECIAL FEATURES

**Eliseev Andrey Vladimirovich**

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics,

e-mail: eavsh@ya.ru,

Irkutsk State Transport University

664074, Irkutsk, 15 Chernyshevsky st.

**Abstract.** Approaches to the formation of a methodological basis for the system analysis of oscillatory structures on the example of elastic-dissipative mechanical systems with two degrees of freedom are considered. The aim of the study is to develop a method for evaluating the properties of mechanical oscillatory systems with account for viscous friction forces based on frequency functions and damping functions depending on the coefficients of connectivity forms. To build mathematical models, we use Lagrange formalism, matrix methods, and elements of the theory of functions of a complex variable. The concepts of the frequency function and the damping function are presented, which reflect the features of the ratio of the potential and kinetic energy of the system, taking into account the viscous friction forces represented by the dissipative function. A method is developed for constructing the frequency function and damping function that reflect the dynamic features of free movements, taking into account the friction forces depending on the coefficient of connectivity forms. Based on the obtained General analytical expressions of frequency functions and damping functions, special variants of mechanical oscillatory systems that are of interest at the initial stage of research are analyzed. The developed method for constructing the frequency function and the damping function can be used to display dynamic forms of connectivity of movements of mechanical oscillatory systems. The proposed method for constructing the frequency function and the damping function can be extended to mechanical oscillatory systems considered in different coordinate systems.

**Keywords:** mechanical system, dynamic connections, frequency function, damping function, connectivity of movement, extreme properties, oscillation, viscous friction.

### References

1. Eliseev A.V., Kuznecov N. K., Moskovskih A. O. Dinamika mashin. Sistemnye predstavlenija, strukturnye shemy i svjazi jelementov [Dynamics of machines. System representations, structural schemes and connections of elements]. Moskva: Innovacionnoe mashinostroenie=(Innovative engineering). 2019. 381 p.

2. Eliseev S. V., Artjunin A. I. Prikladnaja teorija kolebanij v zadachah dinamiki linejnyh mehanicheskikh sistem [Applied theory of vibrations in problems of dynamics of linear mechanical systems]. Novosibirsk: Nauka = Science. 2016. 459 p.
3. Eliseev S.V., Kuznecov N.K., Bol'shakov R.S., Nguen D.H. O vozmozhnostjah ispol'zovanija dopolnitel'nyh svjazej inercionnogo tipa v zadachah dinamiki tehniceskikh system [On the possibilities of using additional inertial type connections in problems of dynamics of technical systems] Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tehniceskogo universiteta = Bulletin of the Irkutsk State Technical University. 2016. № 5 (112). Pp. 19-36.
4. Eliseev S.V., Bol'shakov R.S., Nguen D.H., Vyong K.Ch. Opredelenie chastot sobstvennyh kolebanij mehanicheskikh kolebatel'nyh sistem: osobennosti ispol'zovanija chastotnoj jenergeticheskoj funkcii. Chast' I. [Determination of natural oscillation frequencies of mechanical oscillatory systems: features of using the frequency energy function. Part I.] Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tehniceskogo universiteta= Bulletin of the Irkutsk State Technical University. 2016. № 6 (113). Pp. 26-33.
5. Eliseev S.V., Bol'shakov R.S., Nguen D.H., Vyong K.Ch. Opredelenie chastot sobstvennyh kolebanij mehanicheskikh kolebatel'nyh sistem: osobennosti ispol'zovanija chastotnoj jenergeticheskoj funkcii. Chast' II [Determination of natural oscillation frequencies of mechanical oscillatory systems: features of using the frequency energy function. Part II]. Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tehniceskogo universiteta = Bulletin of the Irkutsk State Technical University. 2016. № 7 (114). Pp. 10-23.
6. Eliseev S.V. Prikladnoj sistemnyj analiz i strukturnoe matematicheskoe modelirovanie (dinamika transportnyh i tehnologicheskikh mashin: svjaznost' dvizhenij, vibracionnye vzaimodejstvija, rychazhnye svjazi) [Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections)] Irkutsk: IrGUPS = Irkutsk State Transport University. 2018. 692 p.
7. Strett Dzh. V. Teorija zvuka [Theory of sound]. M.: GITTL = State publishing house of technical and theoretical literature. 1955. V. 1. 503 p.
8. Homenko A.P., Eliseev S.V. Razvitie jenergeticheskogo metoda opredelenija chastot svobodnyh kolebanij mehanicheskikh sistem [Development of the energy method for determining the frequencies of free vibrations of mechanical systems] Sovremennye tehnologii. Sistemnyj analiz. Modelirovanie= Modern technologies. System analysis. Modeling. 2016. № 1 (49). Pp. 8-19.
9. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press. 2000. 957 p.
10. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control. Vol.252. Springer International Publishing. Cham. 2020. 521 p.
11. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland. 2016. 708 p.