УДК: 51.7 : 519.816

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Черкашин Александр Константинович

д.г.н., профессор, главный научный сотрудник,

зав. лабораторией теоретической географии,

Институт географии им. В. Б. Сочавы СО РАН,

664033, Россия, г. Иркутск, ул. Улан-Баторская 1, e-mail: akcherk@irnok.net

Аннотация. Обсуждаются актуальные проблемы формирования метатеоретических основ моделирования при реализации методов анализа иерархий (МАИ), а именно - вопросы математического обоснования шкалы суждений на основе взаимосвязанных наблюдений, парных сравнений факторов, критериев и альтернатив, расчета приоритетов и их синтеза в итоговые оценки. Показано, что базовые положения (аксиомы) МАИ непосредственно связаны со свойствами частных производных, характеризующих предельную норму замещения факторов, и с дифференциальным уравнением Эйлера для однородных функций многих переменных. На метатеоретическом уровне эти связи обусловлены процедурами расслоения пространств и множеств на элементах базы расслоения разного содержания. Методология МАИ основана на расслоениях числовых множеств, касательных расслоениях на многообразиях и расслоениях знаний на системные теории, что обеспечивает универсальность ее применения. Математический анализ процедур МАИ выделяет требование линейности пространства исследования и необходимость линеаризовать показатели в самом начале обработки данных с дальнейшим переходом от исходных абсолютных показателей к относительным для формирования локальной системы координат касательного слоя (кластера) – пространства локального, линейного, метрического и ограниченного. Уравнение Эйлера связывает значения координат локального пространства касательного слоя в форме метрических зависимостей – функций оценивания линейного и нелинейного вида, известных в МАИ. *Для определения шкалы превосходства на разных уровнях формализации* применяются натуральные и целые числа, рациональные числа, действительные и гипердействительные числа стандартного и нестандартного анализа. Показано, при каких ограничениях в процедурах МАИ, имея матрицу парного оценивания и не зная вид функции ранжирования, появляется возможность вычислять приоритеты и выбирать нужный вариант решения. Расчетные приоритеты – это относительные чувствительности изменения оценочных функций, а их соотношения – нормы замещения учитываемых факторов. Выводятся уравнения синтеза оценок глобального приоритета на основе показателей локальных приоритетов по всем критериям. Итоговая функция оценивания может быть представлена в виде произведения векторов и матриц сравнения разных иерархических уровней (полилинейной формы).

Ключевые слова. Метод анализа иерархий (МАИ), математические основы, процедуры расслоения, касательные расслоения, уравнение Эйлера, функции оценивания, матрицы сравнения.

Цитирование: Черкашин А. К. Математические аспекты реализации метода анализа иерархий //Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2020. № 1 (17). С. 5–24. DOI: 10.38028/ESI.2020.17.1.001

Введение. Прекрасной иллюстрацией применения математических технологий в решении теоретических и прикладных проблем стали процессы иерархического и сетевого анализа, разработанные в 1970-х годах ученым из Питтсбургского Университета (США) – профессором Томасом Л. Саати. В российской научной литературе они называются методом анализа иерархий (МАИ) и методом аналитических сетей (МАС). Многие из статей и книг Т.Л.Саати за прошедшие десятилетия переведены на русский язык, в частности монографии [3-4]. Эти методы основаны на хорошей математике, содержательны и наглядны и имеют множество приложений в различных областях науки и практики [20], что отображено в многочисленных научных публикациях в России и за рубежом, количество которых постоянно возрастает [11]. Сформулированы главные принципы и аксиомы методологии МАИ и МАС, предложены математические модели и методы решения задач [4, 13, 16], которые могут быть осмысленны с информационных позиций метатеоретического знания [6-7], находящегося на границе между чистой математикой и системными теориями. Универсальный характер методологии МАИ и МАС и ее широкое приложение прямо указывают на эту методологическую позицию.

МАИ — логический и математический инструмент системного подхода к сложным проблемам принятия решений, хорошо формализуемый и реализуемый в алгоритмах, компьютерных программах и информационных технологиях с получением нетривиальных результатов обоснования выбора наилучшей альтернативы действия. Анализ проблемы принятия решений начинается с построения иерархической структуры, которая включает цель, критерии (факторы, явления), альтернативы (объекты выбора) и другие особенности, влияющие на выбор. Структурная модель (граф) отражает понимание поставленной проблемы лицом, принимающим решение. Для решения задачи во внимание принимаются разные количественные параметры и качественные характеристики, объективные данные и субъективные экспертные оценки. С помощью процедуры их парных сравнений МАИ позволяет определить приоритеты достижения цели и построить матрицы сравнений (суждений). Затем выполняются анализ этой матрицы и синтез (полилинейная свертка) всех приоритетов иерархии, рассчитываются приоритеты альтернатив относительно главной цели, а лучшей считается альтернатива с максимальным значением приоритета.

МАС – более общая форма процесса анализа иерархии МАИ, используемого в многокритериальном обосновании решений. МАС в отличие от МАИ структурирует проблему не в иерархию цели, критериев и альтернатив, а в сеть взаимных связей компонентов структуры с дальнейшим их попарным сравнением для измерения весов компонентов, ранжирования альтернатив для конечного решения проблемы. Если в МАИ каждый элемент иерархии считается независимым, то МАС не требует такой независимости, поэтому его можно использовать как более эффективный инструмент сравнения с меньшими ограничениями на применение формул.

Как отмечает Т.Л. Саати [4], все наши суждения имеют относительную природу и зависят от контекста, поэтому могут быть ошибочными, если не принимать эту особенность во внимание. Используемые формулы истинны только в ограниченных пределах однородных структур с размытыми границами, поэтому в МАИ исходят из предположения, что «вселенная стратифицирована в пространство однородных структур, отношения между которыми подобны отношениям внутри каждой из этих структур» [4, с. 31]. В связи с этим имеет смысл исследовать методологию МАИ с позиций математических процедур расслоения реальности на многообразиях среды [6-8].

1. Основные понятия и принципы. МАИ включает четыре аксиомы, которые отражают отношения обратной симметрии процедур сравнения однородных элементов иерархических и системных связей, а также проблемы сохранения порядка полученных результатов и их зависимости от исходной и расширенной постановки задачи [4]. Т.Л. Саати [4, 16] выделял семь «столпов» МАИ, согласно которым объективно существуют 1) шкалы отношений, пропорциональность показателей и нормирование критериев оценки; 2) фундаментальная шкала парных сравнений, обратно симметричные матрицы сравнения и собственные векторы приоритетов; 3) нечувствительность собственного вектора к изменениям оценочных суждений, что требует однородности этих оценок; 4) однородность и кластеризация для расширения шкалы с интервала $[1,9]$ до $[1,\infty]$; 5) аддитивный синтез приоритетов на иерархиях и сетевых структурах с помощью полилинейных форм для сведения многомерных показателей к одномерной нормированной безразмерной шкале отношений доминирования; 6) сохранение порядка при реализации синтеза; 7) возможность синтеза индивидуальных суждений для разработки групповых решений, совместимых с личными предпочтениями.

1.1. Линейная шкала оценивания. В технологии МАИ сначала выбираются цели оценивания, эффективность достижения которых определяется функцией $f(\boldsymbol{y})$ набора-вектора критериев (факторов) $\boldsymbol{y}=\{y_i\}$, с позиций которых оцениваются альтернативы $\boldsymbol{z}=\{z_i\}$. МАИ базируется на парных сравнениях между собой отдельно критериев и отдельно альтернатив – вариантов выбора. Основная проблема метода – точность определения критериев и сравнение по этим критериям альтернатив, когда вид оценочной функции $f(\boldsymbol{y})$ неизвестен.

Задача решается на основе перечисленных положений (аксиом), которые формализуются следующим образом (рис. 1). Пусть $\boldsymbol{x}=\{x_i\}$ - система независимых координат общего (тотального) пространства R^n переменных. В этом пространстве формируются локальные центрированные и нормированные системы координат $y_i = (x_i - x_{0i})/\sigma_i$ – безразмерных дискретных или непрерывных величин с центром $\boldsymbol{x}_0$; x_{0i} и σ_i – индивидуальные константы переменных x_i, в частности, их средние значения x_{0i} и квадратические отклонения σ_i. Желательно, чтобы y_i было положительной величиной, отражающей некоторое расстояние – отклонение от нормы: $y_i = |x_i - x_{0i}|/\sigma_i$. При сравнении разных явлений i и j в этом случае используются оценки $a_{ij} = y_j/y_i$. В любом случае величина (критерий) a_{ij} рассматривается как результат измерений по фундаментальной шкале парного сравнения, обладающего свойством обратной симметрии $a_{ij}=1/a_{ji}$. Такие свойства являются выражением первых двух упомянутых гипотез МАИ [4]. Из значений a_{ij} формируется рабочая матрица (ядро метода) $\boldsymbol{A}=\|a_{ij}\|$, на основе которой рассчитываются приоритеты каждого явления путем вычисления собственных значений и векторов этой матрицы. Матрица парных сравнений позволяет выразить относительное превосходство a_{ij} одного явления или объекта над другим j по общему для них признаку: i превосходит j в a_{ij} раз, откуда $a_{ji}=1/a_{ij}$.

Фундаментальная шкала приоритетов сравнения i и j, оцениваемых экспертным путем, состоит из симметрично упорядоченных целых чисел y_{ij}, в частности, ряда (*9, 8, …,2, 1, 1, 2,.., 8, 9*), где $y_{ij}=1$ указывает на равное предпочтение альтернатив i и j, отклонение от 1 влево - на разные степени y_{ij} предпочтения i, а вправо y_{ji} – преимуществ j над i (см. рис. 1). При экспертной оценке определяется, какой из двух сравниваемых критериев является более важным в данном целевом отношении. Таким образом, величина y_{ij} укладывается в интервал [*1, 9*] или в любой оценочный интервал, ограниченный сверху значением y_0. Величина y_{ij} выражает своеобразное расстояние – модуль отклонения $y_{ij} = |x_i - x_{0i}|$ в сторону преимущества i исходного (неизвестного) показателя x_i от эталона x_{0i}. Элементы матрицы в этом случае $a_{ij}= y_{ij}/y_{ji}$, когда условно считается $y_{ji}=1$, и $a_{ii}=1$. Тогда величина y_{ij} просто показывает, во сколько раз разность y_{ij} превышает различие y_{ji}. Результаты оценивания a_{ij} упорядочиваются в матрицу превышения $a_{ij}\geq 1$, а $a_{ji}=1/a_{ij}$. В дифференциальном виде $a_{ij}= dy_j/dy_i$ – приращение dy_i в a_{ij} раз больше приращения dy_j, что при сравнительной оценке соответствует $a_{ij}=y_{ij}$ и $y_{ji}=1$. В частных производных $a_{ij}= -\partial y_j/\partial y_i$, и в силу их особенностей, как операторов, смысл утверждения «во сколько раз» теряется, и можно с a_{ij} действовать чисто математико-аналитическими средствами, что позволяет выяснить механизмы преобразований в малых масштабах.

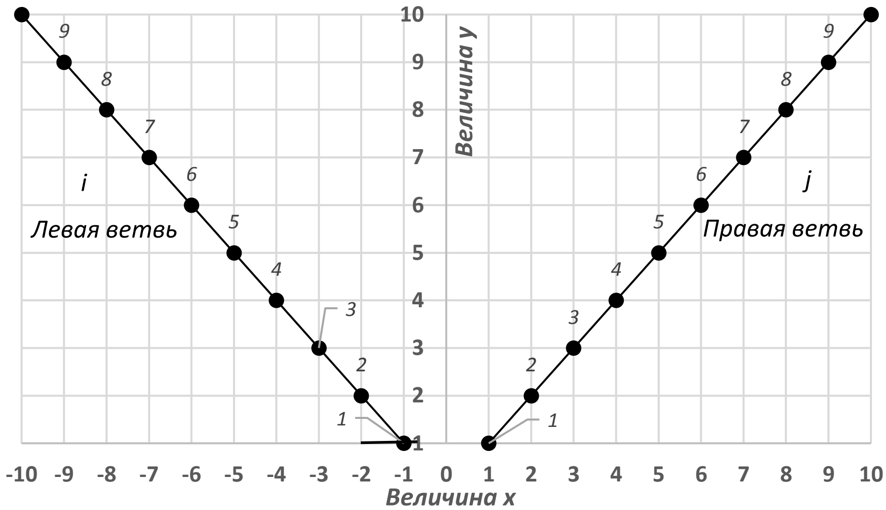

Рис. 1. Схема парного сравнения альтернатив i и j как целочисленная функция $y(x)$ меры отклонения x от x_{0i} (здесь $x_{0i}=0$)

Существование числовой шкалы оценивания Т.Л. Саати [16] связывают с особенностью психологического восприятия реальности, что описывается уравнением психофизического закона Вебера-Фехнера связи «стимул x_i – реакция y_i»:

$$y_i = \alpha\ln(x_i/ x_{0i}) = \alpha\ln x_i - \alpha\ln x_{0i}, \quad (1)$$

где x_{0i} – пороговое значение стимула; α - коэффициент чувствительности к воздействию раздражителя. Величина y_i преобразуется в фундаментальную линейную шкалу интервала [*1, 9*]. Метод парных сравнений впервые введён Г. Т. Фехнером, развит Л. Л. Терстоуном [19] и широко используется в МАИ. Аналогично геофизики делают при расчете по шкале Рихтера магнитуды землетрясений по логарифму энергии сейсмических толчков, а геохимики – при определении кислотности почвы (pH) по логарифму концентрации ионов в почвенном растворе. Очевидно, какой бы не была формула преобразований (1), важно, чтобы она приводила к линейным шкалам абсолютного и относительного сравнения, а в итоге проявляла существующий порядок значимости сравниваемых явлений.

Схема на рис.1 подобна физической модели квантового гармонического осциллятора массы m с частотой колебания ω, дискретные уровни энергии которого $E_p=\omega h(p\text{-}1/2)/2\pi$ линейно зависят от собственных чисел $p=1, 2, 3,\ldots$(h – постоянная Планка). Минимальный уровень энергии $\omega h/4\pi$ при $p=1$ называется уровнем нулевых колебаний. В психологии: выбор колебание (сомнение) – быстрая смена решений, периодическая смена настроений в пользу того или иного решения. Для деятельности один из доминирующих вариантов выбирается окончательно, забыв о других вариантах минимального уровня значимости. Пределы различимых уровней сравнения и выбора задаются учитываемом в МАИ психологическим правилом Дж. Миллера [14], согласно которому кратковременная человеческая память не может различить, запомнить и повторить более 7±2 элементов, т.е. в основном в интервале значений от 1 до 9, в частности, у Т.Л. Саати различаются 9 степеней предпочтения от равной предпочтительности (*1*) до абсолютного предпочтения (*9*) (см. рис.1).

1.2. Использование алгоритма. Рассмотрим последовательность процедур МАИ на примере видоизменяющего влияния факторов среды на формирование облика ландшафта. Учитываются сочетания ландшафтно-образующих факторов – литологического, гидрологического и термического. Под их местным воздействием формируются географические фации нескольких факторальных рядов: $i=1$ – субгидролитоморфный (A); 2 – сублитоморфный (B); 3 – ксеролитоморфный (C); 4 – субгидроморфный (D) ряды. Сравнительная оценка влияния факторов проводилась на примере ландшафтов Олхинского плоскогорья (Южное Прибайкалье) [5]. Преобладают фации субгидролитоморфного и сублитоморфного рядов, на литологические особенности которых накладываются факторы дополнительного и избыточного увлажнения на северных склонах и водосборных понижениях. Ксеролитоморфные фации встречаются на крутых сухих склонах преимущественно южных экспозиций.

По натурным наблюдениям проведены парные сравнения ландшафтно-образующих преимуществ проявления каждого факторального ряда по фундаментальной шкале от 1 до 9 (табл.1).

Таблица 1. Матрица парного сравнения

	A	*B*	*C*	*D*
A	1,0	1,0	5,0	4,0
B	1,0	1,0	5,0	4,0
C	0,2	0,2	1,0	0,5
D	0,3	0,3	2,0	1,0
Сумма ***S***	2,5	2,5	13,0	9,5

Элементы матрицы $\boldsymbol{A}=\|a_{ij}\|$ соответствуют преимуществам фактора i над j, что показывает, во сколько раз i важнее j в ландшафтном отношении. Элемент матрицы кодируется сочетанием номеров (i, j) или символов (A, C) (табл. 1). Например, по экспертной оценке, в исследуемых ландшафтах преимущество $B>D$ отдается сублитоморфным рядам над субгидроморфными $a_{24}=4$; обратная величина $a_{42}=1/4=0{,}25$. Сравнение типа $A=A$ соответствует $a_{11}=1$. Матрица $\boldsymbol{A}$ формируется так, чтобы всегда $a_{ij}=1/a_{ji}$, что является одним из постулатов-аксиом МАИ.

В процессе дальнейшего преобразования матрицы $\boldsymbol{A}$ сначала находятся суммы $\boldsymbol{S}=||S_j||$ ее элементов по столбцам j (табл.1), и на эти суммы делятся значения элементов соответствующих столбцов $b_{ij}=a_{ij}/S_j$; $\boldsymbol{B}=||b_{ij}||$ – преобразованная матрица (табл. 2).

Затем рассчитываются средние значения суммы элементов по строкам новой матрицы. Набор $\boldsymbol{\rho}=||\rho_i||$ средних по всем категориям A, B, C, D примерно соответствует главному собственному вектору этой матрицы (вектору приоритетов). Расчетное значение собственного значения $\lambda=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\rho}$ – скалярное произведение векторов ($\lambda=4{,}04$). Точное сходство $\lambda=\lambda_m$ получается при решении уравнения $\boldsymbol{B\rho}=\lambda_m\boldsymbol{\rho}$ на собственное значение $\lambda_m=n$ и собственный вектор-столбец $\boldsymbol{\rho}_m=||\rho_{mi}||$, где n – порядок матрицы $\boldsymbol{A}$ (число сравниваемых факторов).

Таблица 2. Преобразованная матрица парного сравнения и собственный вектор матрицы

	A	*B*	*C*	*D*	*Сумма*, $\boldsymbol{\rho}$
A	0,41	0,41	0,38	0,42	0,41
B	0,41	0,41	0,38	0,42	0,41
C	0,08	0,08	0,08	0,05	0,07
D	0,10	0,10	0,15	0,11	0,12
Сумма	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

По степени отклонения расчетного вектора $\boldsymbol{\rho}$ от $\boldsymbol{\rho}_m$ и расчетного значения λ от $\lambda_m=4$ можно судить о точности экспертных оценок сравнения, согласованности суждений, сохраняющей приоритеты явлений по данному свойству (цели): $CI=(\lambda-n)/(n-1)$. Условие $CI=1$ выполняется при $a_{ik}a_{kj}= a_{ij}$ и для однородных показателей a_{ij}, т.е. при их независимости от масштаба t измерения $a_{ij}=y_j/y_i=ty_j/ty_i$ (позиции 3) и 4) в упомянутом списке основ МАИ). В данном случае $CI=0{,}012$, что соответствует соотношению $CR=10CI/RI<1$, где $RI=0{,}9$ при $n=4$. Неравенство $CR<1$ указывает на приемлемый результат сравнения факторов, что позволяет по максимальной величине ρ_i выбрать из рассматриваемых альтернатив самую лучшую i. Судя по результатам расчета, это $\rho_1=0{,}41$ (табл. 2), т.е. на рассматриваемой территории основным ландшафтно-образующим фактором является литологический, формирующий сублитоморфные и сублитогидроморфные условия развития.

1.3. Особенности применения. Приведенный алгоритм реализуется с использованием понятий и операций теории квадратных матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ [1], каждый элемент которых a_{ij} и b_{ij} описывает парные связи факторов i и j, что наглядно можно представить в виде прямых a_{ij} и обратных a_{ji} связей $i-j$ вершин графа. Ставится и решается задача поиска собственных значений и векторов матрицы $\boldsymbol{B}$ из равенства $\boldsymbol{B\rho}=\lambda\boldsymbol{\rho}$, результаты решения которого интерпретируются соответствующим образом. Распространенный пример – корреляционная матрица $\boldsymbol{B}=||b_{ij}||$, где b_{ij} имеет смысл парного коэффициента корреляции между нормированными и центрированными случайными величинами y_i и y_j. Решение задачи на собственные значения λ позволяет перевести систему координат исходных величин $\boldsymbol{y}=||y_i||$ в систему независимых координат собственных векторов с расчетом степени информативности

λ каждой координаты, что реализуется в методе главных компонент. Известен метод анализа устойчивости объектов, описываемых системой линейных дифференциальных уравнений $d\mathbf{z}/dt=\boldsymbol{B}\mathbf{z}$ с матрицей $\boldsymbol{B}=||b_{ij}||$ коэффициентов взаимного влияния. Набор собственных значений $\boldsymbol{\lambda}=||\lambda_i||$ - коэффициентов независимых решений исходных уравнений – определяет устойчивость системы по отрицательному значению всех действительных частей комплексных чисел λ_i. Сходным образом формируется матрица переходных вероятностей, описывающая случайные марковские процессы смены состояний; собственный вектор $\lambda_m=1$ соответствует равновесному процессу.

Матрица сравнения Т.Л. Саати [4] имеет свою содержательную нагрузку и позволяет оригинальным способом использовать возможности матричного анализа для принятия решений в различных сферах деятельности. Метод интуитивно соответствует особенностям человеческого мышления, но вместе с тем применяемая математика недостаточно обосновывает алгоритм действия, что затрудняет понимание и содержательную интерпретацию результатов обработки данных. По этой причине в науке управления один из наиболее острых споров касается именно МАИ [18]. Дж. Дайер [10] резюмировал такую озабоченность специалистов, принимающих решения, и предложил для устранения недостатков МАИ использовать методы теории многофакторной полезности. В журнальной дискуссии П. Харкер и Л. Варгас [12] не приняли сравнение МАИ с теорией полезности. Считается, чтобы не возникали проблемы использования алгоритмов МАИ, необходимо понимать принципы МАИ и следовать их требованиям [21].

1.4. Формальные аналогии. В базовых положениях МАИ должно получить отражение, как действуют факторы на приоритеты альтернативных решений, как формируются рейтинги решений, отражающие важность факторов в виде оценочных функций. Матрица $\boldsymbol{A}=||a_{ij}||$ создается по процедуре парных сравнений. Явным достоинством метода является то, что, имея матрицу значений парного сравнения $\boldsymbol{A}$ и не зная вид функции ранжирования $f(\boldsymbol{y})$, мы выполняем оценивание и выбираем лучший вариант решения. Для понимания того, как это происходит, как человеческий опыт и интуиция соотносятся с результатами математических расчетов, проводится дальнейший анализ.

Будем исходить из существования взаимной зависимости однотипных факторов – непрерывных переменных величин $\boldsymbol{y}=||y_i||$, от которых зависят приоритеты решений $f(\boldsymbol{y})$, принимающие при определенном сочетании величин $\boldsymbol{y}$ конкретные значения $f(\boldsymbol{y})=f_0$. В этом случае элементы матрицы парного сравнения $\boldsymbol{A}=||a_{ij}||$ задаются ненулевыми частными производными $a_{ij}=-\dfrac{\partial y_j}{\partial y_i}$, рассматриваемыми в качестве норм замещения одного фактора y_i на другой y_j при сохранении значения функции $f(\boldsymbol{y})=f_0$. Величина коэффициента a_{ij} показывает, на сколько положительно изменится y_j при изменении y_i на единицу. Такая общая постановка удовлетворяет логике МАИ при прямой a_{ij} и обратной $a_{ji}=1/a_{ij}$ связях переменных просто в соответствии со свойствами частных производных; отсюда же $a_{ii}=1$. Очевидно, величина y_i не может быть постоянной величиной, поэтому степень ее изменчивости становится основанием отбора для использования в парном сравнении.

Между разнокачественными показателями существует и различным образом проявляется при оценивании определенный порядок значимости (преимуществ) a_{ij}**,** которые в разных теориях представляют предельную норму замещения, например, предельная норма технического замещения используется в экономической теории, как мера взаимозаменяемости факторов производства, показывающая, на сколько единиц можно уменьшить один из факторов y_j при увеличении другого фактора y_i на единицу, чтобы выпуск сохранялся неизменным $f(\boldsymbol{y})=f_0$ [2]. Предельная норма технического замещения факторов производства равна отношению их предельных производительностей (предельных продуктов), что в наших терминах обозначает:

$$a_{ij} = -\frac{\partial y_j}{\partial y_i} = \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \bigg/ \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_j} \tag{2}$$

Для монотонно возрастающих с увеличением $\boldsymbol{y}$ функций $f(\boldsymbol{y})$ всегда $a_{ij}>0$, т.е. матрица $\boldsymbol{A}=||a_{ij}||$ - положительная $a_{ij}>0$, обратно симметричная $a_{ji} = 1/a_{ij}$ и согласованная $a_{ik}a_{ki}=a_{ij}$. В соответствии с (2) $a_{ij}a_{ji}=1$, и в общем случае любое циклическое произведение n коэффициентов a_{ij} вида $a_{ik}a_{kj}a_{ji}=1$, поэтому определитель Якоби $|\mathbf{A}|=0$, что указывает на зависимость переменных y_i. Кроме того, из (2) следует известное в МАИ соотношение элементов матрицы $\boldsymbol{A}=||a_{ij}||$: $a_{ik}a_{ki} = a_{ij}$.

Аналогично (2) определяется предельная норма замещения в потреблении, что оценивается функцией полезности. Это количество товара y_j, которое потребитель готов отдать, чтобы получить единицу товара y_i, при условии, что совокупная полезность товарного набора для потребителя не изменяется $f(\boldsymbol{y})=f_0=\text{const}$. Фактически строятся кривые безразличия – это множество всевозможных комбинаций благ $\boldsymbol{y}=||y_i||$, имеющих для потребителя одинаковую полезность $f(y)=\text{const}$ и по отношению к выбору которых он безразличен. Аналогом понятия кривой безразличия для производителя является изокванта – множество всевозможных комбинаций факторов производства, сохраняющих объем выпуска продукции. Прослеживается аналогия теории полезности и соотношений МАИ [10], что приводит к линейным и полилинейным зависимостям $f(\boldsymbol{y})$.

Для всякой гладкой, дифференцируемой функции $F(\boldsymbol{x})$ исходных переменных $\boldsymbol{x}=||x_i||$ справедлива формула полного дифференциала:

$$dF(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i, \; G_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}, \tag{3}$$

где $G_i(\boldsymbol{x})$ – частная производная, или чувствительность (факторная нагрузка) изменения функции $F(\boldsymbol{x})$ к изменению величины фактора x_i, например, предельная полезность или производительность. Если сравниваются две изменяющиеся переменные x_i и x_j, а остальные считаются постоянными $dx_k=0$, то уравнение (3) приводится к виду $dF = G_i(\boldsymbol{x})dx_i + G_j(\boldsymbol{x})dx_j$. Для сохранения значения функции $F(\boldsymbol{x})=\text{const}$ при замещении факторов будет $\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{G_i(\boldsymbol{x})}{G_j(\boldsymbol{x})}$. Подобное соотношение справедливо и для скоростей $dx_j/dx_i = v_j/v_i$ ($v_j=dx_j/dt$) или любых изменений по времени или направлениям. Если использовать вместо дифференциалов dx_i конечно-разностные приращения (сравнения) $y_i = x_i - x_{0i}$ (x_{0i} – норма, константа сравнения) получим парные отношения $a_{ij}=y_j/y_i$, соответствующие элементам матрицы $\boldsymbol{A}=||a_{ij}||$. В данном случае предполагается существование линейной зависимости факторов $y_j = a_{ij}y_i$ при условии, что изменение остальных факторов не влияет, а величина $F(\boldsymbol{x})$ сохраняется.

При линеаризации уравнение (3) распространяется на случай конечных разностей $f(\boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0)$ и $y_i = x_i - x_{0i}$:

$$a)\, f(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} g_i y_i,\ б)\, f(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} y_i,\ g_i(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_j} = \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}, \tag{4}$$

где $g_i(\boldsymbol{y})$ – частная производная, или чувствительность изменения функций $f(\boldsymbol{y})$ и $F(\boldsymbol{x})$ к изменению исходной x_i или смещенной y_i относительно постоянной x_{0i} величины. Выражение (4a) – билинейное уравнение по двум наборам переменных $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{g}=||g_i(\boldsymbol{y})||$ – скалярное произведение $f=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{y}$. Дифференциальное уравнение Эйлера (4*b*) имеет решения в виде однородных функций первого порядка со свойством зависимости от масштаба t независимых переменных: $f(t\boldsymbol{y}) = tf(\boldsymbol{y})$. По этой причине шкала сравнения y может иметь разные интервалы и масштабы изменчивости, что согласуется с положением 4) МАИ об однородности. По уравнению (4) осуществляется кластерная свертка значений y_i в оценочную функцию $f(\boldsymbol{y})$. Более того, эта свертка обладает иерархией показателей, общей для билинейных уравнений. Для этого необходимы способы разбиения совокупности факторов и альтернатив на малые группы – кластеры. В результате сложная задача ранжирования решений разбивается на несколько простых задач.

Такая возможность следует из следующих соотношений. Пусть $y_i(\boldsymbol{z})$ зависит от частных показателей $\boldsymbol{z}=||z_k||$ в соответствии с уравнением (4б). В этом случае зависимость $f[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z})]$ от $\boldsymbol{z}$ также удовлетворяет (4б):

$$f[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z})] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial y_i(\boldsymbol{z})}{\partial z_k} z_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \frac{\partial y_i(\boldsymbol{z})}{\partial z_k} z_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z})]}{\partial z_k} z_k. \tag{5}$$

Уравнение Эйлера (4*б*) в векторно-матричном выражении записывается так: $f(\boldsymbol{y}) = \left\| \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \right\| \cdot \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}$, где $\boldsymbol{B}_{fy} = \left\| \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \right\|$ – вектор показателей чувствительности изменения оценочной функции $f(\boldsymbol{y})$ к изменению факторов y_i. Соотношение (5), основанное на этом уравнении, отображается следующим образом

$$f(\boldsymbol{y}) = \left\| \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial y_i}{\partial z_k} \right\| \cdot \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{T}},$$

где $\boldsymbol{B}_{yz} = \left\| \frac{\partial y_i}{\partial z_k} \right\|$ – матрица чувствительности изменения y_i к z_k. Переменная $z_k(\boldsymbol{u})$, в свою очередь, зависит от детальных показателей $\boldsymbol{u}=||u_l||$ нижнего уровня. Тогда $f(\boldsymbol{y})$ может быть представлена в виде произведения векторов и матриц сравнения разных иерархических уровней: $f[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{u})] = \boldsymbol{B}_{fy}\boldsymbol{B}_{yz}\boldsymbol{B}_{zu}\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}$. Такое произведение в МАИ называется полилинейной формой, предназначенной для синтеза значений приоритетов [4]. Это соотношение требует, чтобы рейтинги на более высоких уровнях иерархии могли быть первоначально определены независимо от рейтингов на более низких уровнях. Опубликованные примеры использования МАИ для оценки альтернатив по списку критериев предполагают реализацию этого принципа.

Решением уравнения (4*б*) являются различные однородные функции $f(\boldsymbol{y})=y_i\Phi(\boldsymbol{A})$ наборов первых интегралов $\boldsymbol{\varphi} = ||\varphi_i||$, $\boldsymbol{A}=||a_{ij}||$ уравнения (4*б*) вида

$$a_{ij} = \frac{dy_j}{dy_i} = \frac{y_j}{y_i};\ \varphi_i = \frac{df}{dy_i} = \frac{f}{y_i}. \tag{6}$$

Первые интегралы – это инварианты системы (однородные координаты), описываемые уравнением (4б), т.е. на любом решении этой системы величины отношений (6) остаются постоянными. Понятно, что они связаны с элементами матриц парного сравнения a_{ij} и представляют некоторый идеальный (устойчивый) вариант показателей парного взаимодействия, от величины которых зависят результаты ранжирования $f(\boldsymbol{y})=y_i\Phi(\boldsymbol{A})$**.** В частности, для линейной функции $\Phi(\boldsymbol{A})$ получается

$$f(\boldsymbol{y})=y_i\sum_{j=1}^{n}w_j\frac{y_j}{y_i}=\sum_{j=1}^{n}w_jy_j \tag{7}$$

где w_i – константы интегрирования, в качестве которых можно принять весовые коэффициенты суммирования для каждого фактора y_i при нормировке $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$. При $w_i=1/n$, функция (7) имеет смысл среднего арифметического значения для y_i. Функция любого среднего значения удовлетворяет билинейному уравнению (4) в силу ее однородности. Уравнение (7) используется в МАИ для синтеза оценок глобального приоритета $f(\boldsymbol{y})$ на основе показателей локальных приоритетов по всем факторам y_i. Такой метод позволяет ранжировать альтернативы решения и может быть использован для достижения согласия между экспертами путем «усреднения» или «взвешивания» имеющихся мнений.

Другой пример – степенная зависимость

$$f(\boldsymbol{y})=y_i\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{y_j}{y_i}\right)^{w_j}=\prod_{j=1}^{n}y_j^{w_j},\ \sum_{j=1}^{n}w_j=1\ . \tag{8}$$

Такой зависимостью описывается производственная функция и функция полезности Кобба-Дугласа [2]. Коэффициенты замещения при полной связи переменных для функций (7) и (8)

$$a_{ij}=-\frac{\partial y_j}{\partial y_i}=\frac{g_i}{g_j}=\frac{w_i}{w_j},\ a_{ij}=-\frac{\partial y_j}{\partial y_i}=\frac{g_i}{g_j}=\frac{w_i}{w_j}\frac{y_j}{y_i} \tag{9}$$

При парном сравнении $a_{ij}=dy_j/dy_i$ согласно (6) норма замещения для всех функций одна и та же $a_{ij}=y_j/y_i$.

1.5. Объединение частных оценок. Многие упомянутые базовые положения МАИ [4, 16] связаны с задачами синтеза оценок с помощью полилинейных форм, что дает возможность строить групповые решения. Решение этой задачи, как здесь показано, определено уравнениями Эйлера (4)-(5), свойства которых устанавливают определенный регламент формирования оценочных процедур и функций. Т.Л. Саати [4] перечислил желательные качества функций $f(\boldsymbol{y})$, объединяющих суждения $\boldsymbol{y}=\|y_i\|$ n участников. Среди них выделяется свойство однородности функций $f(t\boldsymbol{y})=tf(\boldsymbol{y})$, удовлетворяющих уравнению (4*б*), которое также записывается в виде условия нормировки

$$\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i}\Big/f(\boldsymbol{y})=1,\ \sum_{i=1}^{n}y_i\rho_i(\boldsymbol{y})=1,\ \rho_i(\boldsymbol{y})=\frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i}\Big/f(\boldsymbol{y}). \tag{10}$$

Число таких функций $f(\boldsymbol{y})$ огромно, и необходимо определить дополнительные ограничительные требования МАИ.

Прежде всего потребовалось выполнение условия единогласия-целостности $f(\boldsymbol{y})=y$, согласно которому все участники высказывают одно и то же мнение $\boldsymbol{y}\equiv y$, и оно, естественно, становится мнением группы. Поскольку общий вид решения (4*б*) $f(\boldsymbol{y})=y_i\Phi(\boldsymbol{A})$, данное свойство удовлетворяется автоматически, что наглядно видно на примере формул (7) и (8). Желательно также принять во внимание требование разделимости $f(\boldsymbol{y}) = f_1(y_1) f_2(y_2) \cdots f_n(y_n)$, по которому $f(\boldsymbol{y})$ представляется в виде произведения функций одной переменной $f_i(y_i)$ наподобие (8). В этом случае

$$f(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} y_i = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial f_i(y_i)}{\partial y_i} \frac{y_i}{f_i} = f(\boldsymbol{y}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(y_i)}{\partial y_i} \frac{y_i}{f_i},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(y_i)}{\partial y_i} \frac{y_i}{f_i} = 1, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f_i(y_i)}{\partial \ln y_i} = 1, \frac{d \ln f_i(y_i)}{d \ln y_i} = w_i = const,\ f_i(y_i) = c_i y_i^{w_i}, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

В итоге оценочная функция $f(\boldsymbol{y})$ при постоянных нормированных величинах w_i представлена произведением функций одной переменной $f_i(y_i) = c_i y_i^{w_i}$, т.е. фактически степенной функцией (8). Такое уравнение наиболее удобно для группового ранжирования с учетом приоритета каждого участника [4, 16].

Более общий подход можно обеспечить, если $f(\boldsymbol{y})$ рассматривать в качестве финслеровой метрики локального векторного пространства $\boldsymbol{y}=\|y_i\|$, удовлетворяющей уравнению (4), за исключением центральной (тривиальной) точки $\boldsymbol{y}\equiv 0$ [17]. Остальные *p*-однородные функции оценки $R[f(\boldsymbol{y})]$ рассматриваются, как монотонная трансформация функции $f(\boldsymbol{y})$, когда не меняется порядок предпочтений и при анализе можно работать с ее трансформированной формой, имеющей содержательный смысл и определяющейся формулой [9]

$$R[f(\boldsymbol{y})] = \sum_i \frac{\partial R[f(\boldsymbol{y})]}{\partial y_i} y_i = \sum_i \frac{\partial R[f(\boldsymbol{y})]}{\partial f} \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} y_i = \frac{\partial R[f(\boldsymbol{y})]}{\partial f} \sum_i \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} y_i = \frac{\partial R[f(\boldsymbol{y})]}{\partial f} f(\boldsymbol{y})$$

– при вычислении $R[f(\boldsymbol{y})]$ просто вносится поправка на значение функции $f(\boldsymbol{y})$. В итоге получается, что так или иначе гипотезы и расчеты в МАИ замыкаются на дифференциальные уравнения Эйлера.

1.6. Математические обоснования расчетов. Используя введенные понятия, реализуем алгоритм расчетов МАИ на примере *n* альтернативных факторов. Матрица сравнения $\boldsymbol{A}=\|a_{ij}\|$ формируется из ненулевых частных производных $a_{ij} = -\dfrac{\partial y_j}{\partial y_i}$, связанных с $f(\boldsymbol{y})=f_0$ соотношением (2), подстановка которого дает матрицу отношений

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} \Big/ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} \Big/ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_2} & \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} \Big/ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_3} & \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} \Big/ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_4} \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_2} \Big/ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} & 1 & -\dfrac{\partial y_2}{\partial y_3} & -\dfrac{\partial y_2}{\partial y_4} \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_3} \Big/ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} & a_{32} & 1 & a_{34} \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_4} \Big/ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{Vmatrix}$$

Здесь элементы матрицы представлены на различных стадиях преобразований. По технологии МАИ эта матрица $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}$ умножается на вектор-строку $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}} =\|y_i\|^{\boldsymbol{T}}$, что дает вектор-строку, каждый элемент которой равен сумме значений элементов столбцов $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{S} =\|S_j\|=$

$\left\| f(\boldsymbol{y}) / \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \right\|^T$. Разделив значения элементов столбцов a_{ij} матрицы $\boldsymbol{A}$ на эту сумму $b_{ij}= a_{ij}/S_j$, получим матрицу $\boldsymbol{B}=\left\| \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \Big/ f(\boldsymbol{y}) \right\|$, составленную из одинаковых столбцов $\boldsymbol{b_i}$. Произведение $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^T=\boldsymbol{e}^T$ – единичный вектор-строка $\boldsymbol{e}^T = \|1\ 1\ 1\ 1\|$ свертывает информацию $\boldsymbol{B}$ по столбцам. Произведение $\boldsymbol{\rho} =\boldsymbol{Be}/4$ суммирует и делит на n=4 значения элементов $\boldsymbol{B}$ по строкам. Результат $\boldsymbol{\rho} = \|\rho_i\|$ – итоговый вектор приоритетов – столбец $\boldsymbol{\rho} = \left\| \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \Big/ f(\boldsymbol{y}) \right\|$ компонентов ρ_i, имеющих смысл относительных чувствительностей оценочной функции $f(\boldsymbol{y})$ к изменению фактора y_i. Сумма компонентов вектора равна $\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{y}^T$=1. Отношение приоритетов ρ_i/ρ_j в векторе $\boldsymbol{\rho}$ соответствует норме замещения факторов.

Произведение векторов $\lambda_m = \boldsymbol{S\rho} = \left\| \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \Big/ f(\boldsymbol{y}) \right\| \cdot \left\| f(\boldsymbol{y}) / \dfrac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \right\|^T = 4 -$ произведение строки суммы $\boldsymbol{S}$ по столбцам матрицы $\boldsymbol{A}$ на столбец суммы по строкам матрицы $\boldsymbol{B}$. Значение n=4 – порядок матрицы $\boldsymbol{A}$, в данном случае главное и единственное собственное значение λ_m матрицы $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющей равенству $\boldsymbol{A\rho}=\lambda_m\boldsymbol{\rho}$.

1.7. Синтез приоритетов. Множество вопросов возникает в связи с 6-м положением МАИ, касающимся сохранения порядка или возможной инверсии порядка при реализации синтеза приоритетов $f(\boldsymbol{y})$ по приоритетам нижележащего уровня $y_i(\boldsymbol{z})$. Распределенный метод суммирования следует из (5) и (10):

$$1=\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f(\boldsymbol{y})} \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{f(\boldsymbol{y})} \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial y_i(\boldsymbol{z})}{\partial z_k} \frac{z_k}{y_i},$$

$$1=\sum_{i=1}^{n} \rho_i(\boldsymbol{y}) y_i \sum_{k=1}^{m} \rho_{ik}(\boldsymbol{z}) z_k,\ \rho_i(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \Big/ f(\boldsymbol{y}),\ \rho_{ik} = \frac{\partial y_i(\boldsymbol{z})}{\partial z_k} \Big/ y_i .$$

При идеальном способе рассчитанные приоритеты $\rho_{ik}(\boldsymbol{z})$ нормируются (делятся) на максимальное значение $\rho_{im}(\boldsymbol{z})$ в группе $y_i(\boldsymbol{z})$. В распределенном варианте получается $1=\sum_{i=1}^{n} \rho_i(\boldsymbol{y})\rho_{im}(\boldsymbol{z}) y_i \sum_{k=1}^{m} \dfrac{\rho_{ik}(\boldsymbol{z})}{\rho_{im}(\boldsymbol{z})} z_k$, а в идеальном: $1 \neq \sum_{i=1}^{n} \rho_i(\boldsymbol{y}) y_i \sum_{k=1}^{m} \dfrac{\rho_{ik}(\boldsymbol{z})}{\rho_{im}(\boldsymbol{z})} z_k$. Понятно, что порядок приоритетов сохраняется, если величины $\rho_{im}(\boldsymbol{z})$ не зависят от номера группы i. В противном случае возникают инверсии порядка альтернатив.

1.8. Единичные значения. Скалярное произведение векторов равно $\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{y}^T$=1 в силу соотношения (10). В данном случае элементы вектора-строки сравнительных оценок $\boldsymbol{y}=\|y_i\|$ имеют произвольные значения y_i, но в МАИ все эти значения единичны $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e} =\|1\ 1\ 1\ 1\|$, т.е. соответствуют минимальным величинам y_i=1, что в аналоговой модели квантового осциллятора соответствует уровню нулевых колебаний (p=1) (см. рис.1). Судя по формулам (7)-(8), значение $f(\boldsymbol{y})$ будет также единично $f(\boldsymbol{y})$=1. Тогда элементы матрицы сравнения по уравнению (9) задаются отношением $a_{ij} = w_i/w_j$, где w_i – весовые или стоимостные коэффициенты. Абсолютная и относительная чувствительность изменения $f(\boldsymbol{y})$ к фактору y_i равна коэффициенту w_i.. Это показывает, что итоговый вектор приоритетов $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{w}$ равен весу (цене) факторов при $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}$. Применение не единичных, а других постоянных значений $\boldsymbol{y}=y>1$ по причине однородности функции $f(\boldsymbol{y})$ и условия единогласия дает $f(\boldsymbol{y})=y$, но при этом показатели сравнения – нормы замещения и относительной чувствительности – не изменяются. При $f(\boldsymbol{y})=1$ эта функция имеет минимальное значение, и чем меньше значения элементов результирующего вектора реализации МАИ – приоритетов $\boldsymbol{\rho}=\left\| \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \Big/ f(\boldsymbol{y}) \right\|$ – к нулю, тем менее значим w_i соответствующий факторный критерий или альтернатива выбора y_i, на основании которых совершается выбор.

2. Обсуждение результатов. Векторно-матричные математические преобразования позволяют исследовать алгоритмы МАИ с позиции некоторых общих формальных оснований. Это дает возможность понять закономерности получения конечного результата оценки уровня доминирования ρ_i по исходным оценочным категориям y_i парного сравнения на базе фундаментальной шкалы [*1, 9*]. Помимо математических понятий и их свойств, формальный анализ использует в качестве своеобразной аксиомы билинейное дифференциальное уравнение Эйлера, признавая тем самым, что все оценочные функции $f(\boldsymbol{y})$ относятся к однородным функциям разного порядка. Остальные аксиомы МАИ оказываются следствием этих положений, научные источники которых необходимо определить.

2.1. Расслоение на множествах. При реализации процедур оценивания приходится сравнивать изучаемые явления с элементами числовых множеств и применять операции на множествах. Числовые множества (системы) – это множества натуральных (N), целых (Z), рациональных (Q), вещественных действительных (R), гипердействительных R^* и других видов чисел вместе с определёнными над этими множествами алгебраическими операциями и с заданным на множестве отношениями линейного порядка. В методологии МАИ первичной становится гипотеза существования порядка в иерархии способов достижения цели. В перечисленных числовых системах этот порядок существует, и каждому явлению можно сопоставить число x и числа, которые больше или меньше данного (рис.3). Меняя число, мы как бы переходим от одного явления к другому по гомотопическому пути, связывающему явления или события в пространстве или во времени. Абсолютную единственную координату x явления на числовой оси определить невозможно, но можно оценить относительное положение y явлений на соответствующей шкале сравнений $y=x-x_0$ – локальных координат. Особенности локального пространства описываются процедурами расслоения [7].

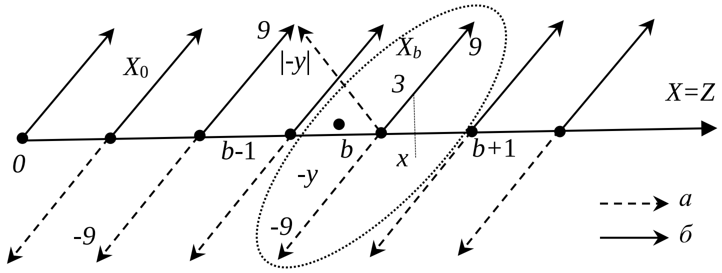

Рис. 2. Расслоенная структура числовых систем. Стрелками указаны отношения подчинения (*а*) и доминирования (*б*) относительно узлов базы расслоения $b \in B$ (разбиения на десятки $10b \pm 9$). Эллипсом выделена локальная окрестность элемента $b \in B$.

Расслоение в математике – это отображение $\pi{:}X\to B$, обратное которому $\pi^{-1}{:}b\to X$ развертывает элементы $b\in B$ в X в виде слоев X_b. В расслоении участвуют множество расслоения $X=\{x\}$, множество базы расслоения $B=\{b\}$, проекция расслоения π. Обратная проекция π^{-1}: $B\to X$ превращает X в результат расслоения – расслоенное множество $Y = \{X_b\}$, где $X_b\in X$ и $X_b\in Y$ – слой X_b над элементом базы $b\in B$ в X, и $Y= B\times X_0$ (X_0 – типовой слой). Каждый слой X_b объединяет элементы множества X в класс эквивалентности по признаку b. Через эти элементы b базы B, слои X_b и пространства X расслоения соприкасаются.

Формами расслоения – разбиения X на непересекающиеся подмножества X_b – являются процедуры сортировки, декомпозиции, типизации, систематики, классификации и т.д.. В МАИ явления и критерии группируются в кластеры-слои, упорядоченные в иерархию связей.

Примером расслоения $\pi : Z\to B$ является разделение целых чисел $x\in Z$ на десятки, т.е. деление на 10 с остатком или недостатком $x=10b\pm y$ (рис.2), где $b\in B$ – номер десятка в последовательности, например, число x в окружении элемента базы b=23 в слое $X_b = X_{23}$ равно $x=10{\cdot}23{\pm}9$. Разность y принадлежит интервалу $[1, 9]$, как в методологии МАИ. Остаток $|+y|$ говорит о преобладании следующей позиции $b+1$ над b, а недостаток $|-y|$ – о преимуществах b над предшествующей в ряду позицией b-1 (по направлению стрелки). Разность между числами $|x_1 - x_2|$, относящимися к разным слоям b, может быть больше 9, поэтому преобладание рассчитывается по относительному положению чисел в соответствующих слоях, сходных с типовым интервалом $X_0 = [1, 9]$, например, числа $x_1=35$ и $x_2=12$ расположены в 3-м и 1-м десятках (слоях), и преобладание свойства b =3 над b=1 будет равно $5-2=3$. Формально сравнение проводится по модулю 10, т.е. $y=|x_1 - x_2| \bmod 10$, $y=|35-12| \bmod 10 = 23-10{\cdot}2=3$. Вся последовательность целых чисел $Z= B\times X_0$ построена на базе номеров десятков $b\in B$ и связанных с ними слоев $X_0 = [1, 9]$ (рис. 2).

Элементы базы $b\in B$ могут быть расположены разным способом, но путем их парного сравнения a_{ij} по МАИ можно воссоздать естественный непротиворечивый линейный порядок $b_j\to b_i$, *определив значения* $\rho_i\in(0,1)$ рейтинга собственного вектора $\boldsymbol{\rho}$. В этом случае, единичный отрезок X_0 = (0,1) – это типовой слой расслоения множества континуума действительных чисел R на базе множества целых чисел $b\in Z$: $x=b\pm1$. Частные оценки y могут проводиться и в единицах $\rho_{ij}\in(0,1)$, например, понимая, с какой условной вероятностью ρ_{ij} состояние b_j *переходит в состояние* b_i.

Задачи могут ставиться и решаться с использованием различных числовых систем с применением соответствующих средств математического анализа. В рамках данного исследования для определения качественного превосходства y_i применяются натуральные N и целые Z числа, для оценки отношений $a_{ij} = y_j/y_i$ – рациональные числа Q, парного сравнения вида $a_{ij} = -\dfrac{dy_j}{dy_i} = \dfrac{g_i(\boldsymbol{y})}{g_j(\boldsymbol{y})}$ – действительные числа R, а вида $a_{ij} = -\dfrac{\partial y_j}{\partial y_i}$ – гипердействительные числа R^* нестандартного анализа. В разных типах выбранной числовой системы элементы сравнения считаются зависимыми или независимым величинами.

2.2. Расслоения на многообразиях. В качестве базы расслоения пространства используются гладкие многообразия M – это поверхности, локально похожие на евклидовые линейные пространства R^n размерности n. Поверхности задаются выпуклыми функциями

$F=F(\boldsymbol{x})$ переменных $\boldsymbol{x}$ в координатах $\boldsymbol{x}=||x_i||$ $(i=1,2,..,n)$ n-мерного объемлющего (тотального) пространства X. Расслоением называется четверка (X, M, π, T), где X – пространство расслоения, M – база расслоения с непрерывной топологией, T – типовой (модельный) слой, $TM=M\times T=\{T_bM\}$ – расслоенное пространство. Проекция $\pi:X\to M$ ставит в соответствие каждой точке $b\in M$ касательный слой $T_bM\subset TM$, например, касательную (гипер)плоскость к поверхности M в точке b с координатами $\boldsymbol{x}_b=||x_{bk}||$ в пространстве $X=\mathrm{R}^n$. В структуре конкретного слоя T_bM выделяется индивидуальный центр – точка b с координатами $\boldsymbol{x}_b=||x_{bk}||$ и ядро-карта V_b, соответствующая открытой окрестности этой точки, где имеется наибольшее сходство свойств многообразия и данного слоя T_bM. Остальное пространство слоя $T_bM \setminus V_b$ трактуется как периферия. Такие построения похожи на информационную технологию картографирования и индуцируют естественную структуру в отдельном картографическом слое типа «центр-периферия» [6].

В каждом слое формируется система локальных координат $\boldsymbol{y}=||y_i||$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_b$, $y_i=x_i-x_{bi}$ с началом $\boldsymbol{y}=0$ в точке касания b. В технологии МАИ в касательном слое, описывающем конкретную ситуацию $\boldsymbol{x}_b$ в терминах соответствующего числового множества, вокруг точки b формируется ядро с системой координат $\boldsymbol{y}$, куда точка $\boldsymbol{y}=0$ обычно не относится. Координатное ядро ограничено значениями $\boldsymbol{y}<\boldsymbol{y}_0$, в МАИ равными $\boldsymbol{y}_0=9$. Оценочная структура ядра показана на рис. 1. Положение $\boldsymbol{x}_b$ объясняет все свойства слоя T_bM, которые выводимы из количественных и качественных характеристик позиции b. В этом смысле многообразие M является средой для всех явлений и процессов, совершаемых в каждом слое.

Уравнение касательной плоскости к поверхности многообразия $F=F(\boldsymbol{x})$ в локальных координатах $\boldsymbol{y}$ описывается линейным дифференциальным уравнением (4*б*) зависимости $f(\boldsymbol{y})$:

$$f(\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_i}y_i\,. \tag{11}$$

В каждом касательном слое T_bM реализуется одно и то же универсальное уравнение (11), которое, как показано выше, лежит в основе аналитических преобразований МАИ. В силу этого расслоенное пространство $TM=\{T_bM\}$ и всякий слой T_bM линейно организованы и формируют векторное пространство взаимодействия. По этой причине, оперируя с оценочными показателями, их необходимо в первую очередь привести к линейному виду, что, в частности, делается по формуле логарифмирования (2). Среди предложенных шкал линейная шкала целых чисел от одного до девяти используется гораздо чаще в приложениях и реализуется в экспертизе. Т. Саати [15] обосновано отстаивал ее как наилучшую шкалу для представления весовых показателей.

Таким образом, математическим основанием МАИ являются геометрические процедуры расслоения на гладких многообразиях с формированием множества касательных слоев, в каждом из которых реализуются принципы МАИ. Согласно этим принципам, пространство сравнения положительно, линейно, ограничено, метризовано и организовано по уравнению (11).

2.3. Системное расслоение. Открытым остается вопрос о сквозном применении МАИ в разных областях науки и практики. Эта проблема также рассматривается и решается с точки зрения расслоения $\pi:X\to M$ знаний X о реальности на теоретические слои T_b на базе фундаментальных знаний M, включающих инварианты $b\in M$ разных теорий, на которых эти теории и соответствующие модели-суждения воспроизводятся [6]. Все теории T_b подобны теории модельного слоя T – общей теории систем, по образцу которой они создаются. Расслоенное пространство $TM=M\times T$ как прямое произведение многообразия и типового слоя формируют структуру единой системной науки [8]. Понятия и аксиомы каждой специальной теории формируются по образцу структуры слоя расслоения на многообразиях среды в локальных координатах связи понятий, в которых среда не учитывается (чистое знание). В каждом теоретическом слое воспроизводится структура соответствующих числовых систем. Таким образом, расслоения одного типа послойно используют результаты расслоений другого типа в некоторой иерархической последовательности перехода от абстрактного уровня познания к конкретному. Универсальность МАИ означает возможность их использования в разных предметных слоях системных теорий с привлечением уравнений (11) касательных слоев и расслоений различных числовых систем, в которых осуществляется переход от систем всеобщей связи к парным сравнениям.

Заключение. В работах Т.Л. Саати предложены оригинальные алгоритмы альтернативного выбора решений на основе парных сравнений количественных критериев (показателей, факторов) по их относительному превосходству. Математические аспекты реализации МАИ оказались связаны с частными производными, отражающими предельную норму замещения одного фактора другим при сохранении величины оценочной функции. Эти понятия широко применяются в экономической теории и других областях системного знания, что обеспечило широкое распространение МАИ в приложениях.

Показано, что истинность аксиом аналитических процедур МАИ непосредственно определена свойствами дифференциальных уравнений Эйлера для однородных функций, которые связывают локальные координаты слоев линейного пространства расслоения на многообразиях – одного из вариантов математической технологии расслоения на базах разного содержания. В методологии МАИ прослеживаются расслоения числовых множеств, касательные расслоения на многообразиях и расслоения знаний на системные теории, что обеспечивает ее универсальное применение. Подчеркивается требование линейности пространства анализа и необходимость линеаризовать показатели в начале исследования. Затем надо переходить от исходных абсолютных показателей к относительным, формируя локальную систему координат тематического слоя (кластера) – пространства линейного, метрического и ограниченного.

Предлагаемый метатеоретический подход позволяет математически объяснить некоторые особенности применения МАИ, в частности, иерархическую организацию расчетов глобальных приоритетов по частным оценкам. Приоритеты оказываются относительными чувствительностями изменения оценочных функций, а их соотношения – нормами замещения факторов. Причем неизвестные целевые функции в МАИ рассматриваются на самом нижнем единичном уровне значений, который достигается при минимальной единичной величине факторов. Идеальный способ объединения приоритетов не следует применять в МАИ без опасности утраты точности расчетов (изменения ранга). Учет математических особенностей МАИ делает эту методику действительно универсальной и позволяет ее использовать в сочетании с другими методами количественных исследований и решения прикладных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит. 2010. 560 с.
2. Клейнер Г.Б. Производственные функции. Теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика. 1986. 239 с.
3. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 278 с.
4. Саати Т. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. М.: Издательство ЛКИ. 2008. 360 с.
5. Фролов А.А., Черкашин А.К. Микрозональная геоморфологическая дифференциация ландшафтов и степень серийности топогеосистем // География и природные ресурсы. 2019. № 1. С. 168 - 177.
6. Черкашин А.К. Метатеоретическое системное моделирование природных и социальных процессов и явлений в неоднородной среде // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2019. № 1 (13). С. 61-84.
7. Черкашин А.К. Инновационная математика: поиск оснований и ограничений моделирования реальности // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2019. № 2 (14). С. 69-87
8. Черкашин А.К. Единая наука о природе и обществе // Общество. Среда. Развитие. 2019. № 4. С. 3-11.
9. Черкашин А.К., Красноштанова Н.Е. Методика создания оценочных карт опасности кризисных ситуаций на основе картографической информации // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2019. № 4 (16). С. 75-88.
10. Dyer J.S. Remarks on the analytic hierarchy process // Management science. 1990. V. 36. No.6. P. 249–258.
11. Emrouznejad F., Marra M. The state of the art development of AHP (1979–2017): a literature review with a social network analysis // International journal of production research. 2017. V.55. No.22. P. 6653-6675.
12. Harker P. T., Vargas L. G. Reply to remarks on the analytic hierarchy process by J. S. Dyer // Management Scince. 1990. V.36. No. 3. P. 269–273.
13. Ishizaka A., Labib A. Review of the main developments in the analytic hierarchy process // Expert systems with applications. 2011. V. 38. No. 11. P. 14336–14345.
14. Miller G. A. *The magical number seven, plus or minus two:* some limits on our capacity for processing information // The psychological review. 1956. V. 63. P. 81—97.
15. Saaty T.L. Response to Holder's comments on the analytic hierarchy process // Journal of the operational research society. 1991. V. 42. No. 10. P. 909-929.
16. Saaty T.L. The seven pillars of the analytic hierarchy process // Köksalan M., Zionts S. (eds). Multiple criteria decision making in the new millennium. Lecture notes in economics and mathematical systems. V. 507. Berlin, Heidelberg: Springer. 2001. P. 27-46.
17. Shen Z. Lectures on Finsler geometry. World scientific publishers. 2001. 256 p.
18. Smith J. E., Winterfeldt D. Decision analysis in management science // Management science. 2004. V.50. No 5. P. 561–574.
19. Thurstone L. L. A law of comparative judgement, reprint of an original work published in 1927 // Psychol. Rev.. 1994. P. 266–270.
20. Vaidya O.S., Kumar S. Analytic hierarchy process: An overview of applications // European journal of operational research. 2006. V.169. P. 1–29.
21. Whitaker R. Criticisms of the analytic hierarchy process: why they often make no sense // Mathematical and Computer Modelling. 2007. V. 46. P. 948–961.

UDK 51.7:519.816

MATHEMATICAL ASPECTS OF IMPLEMENTING THE ANALYTIC HIERARCHY PROCESS

Alexander K. Cherkashin
Dr., Professor, Chief Researcher,
Head of the Laboratory "Theoretical geography"
V. B. Sochava Institute of Geography
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
664033, Russia, Irkutsk, ul. Ulan-Batorskaya1, akcherk@irnok.net

Abstract. The article discusses current problems of forming metatheoretic foundations of modeling in the implementation of analytic hierarchy process (AHP), namely, issues of mathematical justification of the scale of judgments based on interrelated observations, pairwise comparisons of factors, criteria and alternatives, calculation of priorities and their synthesis in the final estimates. It is shown that the basic AHP rules (axioms) are directly related to the properties of partial derivatives that characterize the marginal rate of factors substitution, and to the Euler differential equation for homogeneous functions of many variables. At the metatheoretic level, these relationships are due to the procedures of fibering spaces and sets over elements of bundle bases with different contents. The AHP methodology is based on bundles of numerical sets, tangent bundles over manifolds, and knowledge bundles on system theories, which provides the universality of its application. Mathematical analysis of AHP procedures highlights the requirement of linearity of the research space and the need to linearize indicators at the beginning of data processing with a further transition from the initial absolute indicators to relative ones in order to form a local coordinate system of the tangent fiber (cluster) as local, linear, metric, and bounded space. The Euler equation relates the values of the coordinates of the local space of the tangent fiber in the form of metric dependencies as linear and nonlinear estimation functions known in AHP. To determine the preference scale at different levels of formalization, natural and integer numbers, rational numbers, real and hyperreal numbers of standard and nonstandard analysis are used. It is determined the restriction in AHP procedures, when having a matrix of paired evaluation and not knowing the type of ranking function, it is possible to calculate priorities and choose the desired solution. The calculated priorities are the relative factors sensitivities of the evaluation functions, and their ratios are the rates of substitution of the considered factors with unit values. Equations are derived for the synthesis of evaluation of the global priority based on local priorities across all criteria. The final evaluation function can be represented as a product of vectors and comparison matrices of different hierarchical levels (polylinear form).

Keywords. Analytic hierarchy process (AHP), mathematical framework, procedure of bundle, tangent bundle, Euler equation, evaluation functions, pairwise comparison matrix

References

1. Gantmaher F.R. Teoriya matric [Matrix theory]. M.: Fizmatlit. 2010. 560 p. (in Russian)
2. Klejner G.B. Proizvodstvennye funkcii. Teoriya, metody, primenenie [Production function. Theory, methods, application]. M.: Finansy i statistika = Finance and Statistics. 1986. 239 p. (in Russian).
3. Saati T. Prinyatie reshenij. Metod analiza ierarhij [Decision making. Analytic hierarchy process]. M.: Radio i svyaz.'= Radio and communication, 1993. 278 p. (in Russian).
4. Saati T. Prinyatie reshenij pri zavisimostyah i obratnyh svyazyah: Analiticheskie seti [Decision-making with dependencies and feedbacks: Analytical networks]. M.: Izdatel'stvo LKI. 2008. 360 p. (in Russian)
5. Frolov A. A. Cherkashin A. K. Mikrozonal'naja geomorfologicheskaja differenciacija landshaftov i stepen' serijnosti topogeosistem [Microzonal geomorphological landscape differentiation and the degree of seriality of topogeosystems] // Geografija i prirodnye resursy = Geography and natural resources. 2019. V. 40. № 1. Pp. 90–98 (in Russian).
6. Cherkashin A.K. Metateoreticheskoe sistemnoe modelirovanie prirodnyh i social'nyh processov i yavlenij v neodnorodnoj srede [Metatheoretic system modeling of natural and social processes and phenomena in a heterogeneous environment] // Informacionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii = Information and mathematical technologies in science and management. 2019. № 1 (13). Pp. 61-84. (in Russian)
7. Cherkashin A.K. Innovacionnaya matematika: poisk osnovanij i ogranichenij modelirovaniya real'nosti [Innovative mathematics: finding the foundations and limitations of reality modeling] // Informacionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii = Information and mathematical technologies in science and management. 2019. № 2 (14). Pp. 69-87. (in Russian)
8. Cherkashin A.K. Edinaya nauka o prirode i obshchestve [Unified science of nature and society] // Obshchestvo. Sreda. Razvitie = Society. Environment. Development. 2019. № 4. Pp. 3-11. (in Russian)
9. Cherkashin A.K., Krasnoshtanova N.E. Metodika sozdaniya ocenochnyh kart opasnosti krizisnyh situacij na osnove kartograficheskoj informacii [Methodology for creating risk assessment maps of crisis situations based on cartographic information] // Informacionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii = Information and mathematical technologies in science and management. 2019. № 4 (16). Pp. 75-88.
10. Dyer J.S. Remarks on the analytic hierarchy process // Management science. 1990. V. 36. № 6. Pp. 249–258.
11. Emrouznejad F., Marra M. The state of the art development of AHP (1979–2017): A literature review with a social network analysis // International journal of production research. 2017. V.55. № 22. Pp. 6653-6675.
12. Harker P. T., Vargas L. G. Reply to remarks on the analytic hierarchy process by J. S. Dyer // Management Scince, 1990. V.36. № 3. Pp. 269–273.
13. Ishizaka A., Labib A. Review of the main developments in the analytic hierarchy process // Expert systems with applications, 2011. V. 38. № 11. Pp. 14336–14345.
14. Miller G. A. *The magical number seven, plus or minus two:* some limits on our capacity for processing information // The psychological review, 1956. V. 63. Pp. 81—97.

15. Saaty T.L. Response to Holder’s comments on the analytic hierarchy process // Journal of the operational research society, 1991. V. 42. № 10. Pp. 909-929.
16. Saaty T.L. The seven pillars of the analytic hierarchy process // Köksalan M., Zionts S. (eds). Multiple criteria decision making in the new millennium. Lecture notes in economics and mathematical systems. V. 507. Berlin, Heidelberg: Springer. 2001. Pp. 27-46.
17. Shen Z. Lectures on Finsler geometry. World scientific publishers. 2001. 256 p.
18. Smith J. E., Winterfeldt D. Decision analysis in management science // Management science. 2004. V.50. № 5. Pp. 561–574.
19. Thurstone L. L. A law of comparative judgement, reprint of an original work published in 1927 // Psychol. Rev., 1994. Pp. 266–270.
20. Vaidya O.S., Kumar S. Analytic hierarchy process: An overview of applications // European journal of operational research, 2006. V.169. Pp. 1–29.
21. Whitaker R. Criticisms of the analytic hierarchy process: why they often make no sense // Mathematical and Computer Modelling. 2007. V. 46. Pp. 948–961.